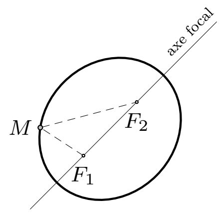
TD3 : Coniques et quadriques

Ellipses

Exercice 1 (Paramétrisation d'une ellipse)



Soit une ellipse $E = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(F_1, M) + \mathrm{d}(M, F_2) = 2a\}$ définie par ses deux foyers F_1 et F_2 à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, et une constante réelle $a > c$.

Déterminer une courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dont l'image est E.
Donner l'expression explicite de f dans le cas où $F_1 = (-2, -1)$, $F_2 = (2, 2)$ et $a = 3$.

Exercice 2 (Grand diamètre d'une ellipse)

Soit dans un plan affine euclidien une ellipse E qui n'est pas un cercle. Montrer qu'il existe un unique couple (non ordonné) de points $\{M_1, M_2\}$ tel que

$$\mathrm{d}(M_1, M_2) = \max_{A,B \in E} \mathrm{d}(A, B).$$

En déduire qu'il n'y a que deux symétries orthogonales qui préservent cette ellipse.

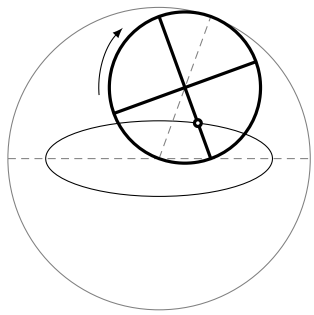
Exercice 3 (Projection d'un cercle)

a) Soit P un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, donner une condition sur a, b, c, d pour que P ne soit pas orthogonal au plan $z = 0$.

b) Soit $A \in P$, donner des équations du cercle $C \subset P$ de centre A et de rayon R.

c) On suppose que P n'est pas orthogonal à $z = 0$, montrer que le projeté orthogonal du cercle C sur le plan $z = 0$ est une ellipse. À quelle condition est-ce un cercle ?

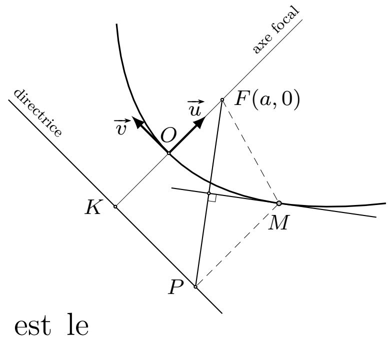
Exercice 4 (Théorème de La Hire)



Soient un disque de rayon R qui roule à l'intérieur d'un cercle de rayon $2R$ et M un point fixe du premier disque. Montrer que M décrit une ellipse et réciproquement que toute ellipse peut être obtenue de cette façon.

Paraboles et hyperboles

Exercice 5 (Miroir parabolique)



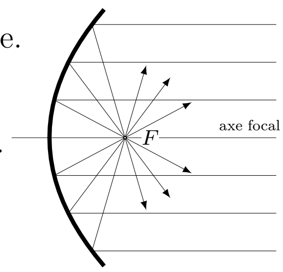
Soient une droite $\mathcal{D}$ et un point F en dehors de cette droite. On rappelle qu'une parabole de directrice $\mathcal{D}$ et de foyer F est l'ensemble des points M tels qu'on ait l'égalité des distances

$$d(M,F) = d(M,\mathcal{D}).$$

On se place dans le repère affine orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, où O est le point d'intersection de l'axe focal avec la parabole, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de l'axe focal et de la directrice. Soient $(a, 0)$ les coordonnées de F dans ce repère.

a) Déterminer l'équation de la parabole dans ce repère.

b) Donner une courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dont l'image est cette parabole.



c) Soient M un point de la parabole et P sa projection sur la directrice. Montrer que la tangente en M est orthogonale à FP.

d) En déduire que la tangente en M est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMP}$.

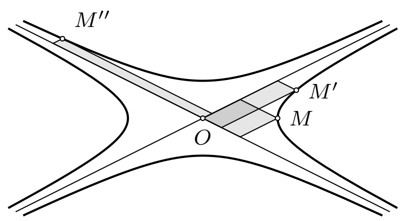
e) Montrer qu'étant donné un miroir concave parabolique, les rayons parallèles à l'axe focal passent par le foyer.

Exercice 6 (Paramétrisation d'une hyperbole)

Soit une hyperbole $H = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \left|\mathrm{d}(F_1, M) - \mathrm{d}(M, F_2)\right| = 2a\}$ définie par ses deux foyers F_1 et F_2 à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, et une constante réelle $a \in]0, c[$.

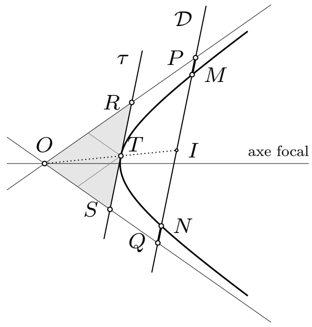
Déterminer une courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dont l'image est la branche $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(F_1, M) - \mathrm{d}(M, F_2) = 2a\}$ de H.

Exercice 7 (Parallélogrammes à surface constante)



Soient deux droites qui se coupent en un point O. On considère l'ensemble des points M tels que le parallélogramme ayant O et M comme sommets opposés et deux côtés sur les droites données a une surface fixé $S > 0$.
Montrer que cet ensemble est formé par deux hyperboles ayant les deux droites comme asymptotes.
Et réciproquement, étant donné une hyperbole, montrer que les parallélogrammes formés par les asymptotes, le centre et les points M de l'hyperbole, ont une surface constante (ne dépendant pas du choix de M).

Exercice 8 (Sécantes et tangentes à une hyperbole)



On rappelle que l'équation de l'hyperbole dans le repère affine orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de l'axe focal et de la directrice, s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a) Montrer que toute droite parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole (et distincte de cette asymptote) coupe l'hyperbole en exactement un point.

b) Montrer que si une droite $\mathcal{D}$ coupe l'hyperbole en deux points M et N et les asymptotes en deux points P et Q, les segments MN et PQ ont le même milieu (on écrira une équation du second degré dont les abscisses des points M et N (resp. P et Q) sont solutions et on évaluera la demi-somme de ces solutions).

c) En déduire une construction de l'hyperbole point par point connaissant les asymptotes et un point.

d) Montrer que les milieux des cordes MN de l'hyperbole parallèles à une direction donnée appartiennent tous à une même droite passant par le centre O de l'hyperbole.

e) Soit τ une tangente à l'hyperbole en T, R et S les points d'intersection de τ avec les asymptotes. Montrer que $|TR| = |TS|$.

f) Montrer que l'aire du triangle ORS ne dépend pas de T.

Coniques et quadriques

Exercice 9 (Équations et natures des coniques)

Déterminer la nature des courbes suivantes et, quand il existe, leur centre.

a) $(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0$,

b) $2x(x - 1) + (y - 2)(y - 3) = 0$,

c) $4x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 3y = 1$.

d) $(x + y + 1)(x - y + 3) = 3$.

e) $2x^2 + 4xy + y^2 + x + y = 0$.

f) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$.

Exercice 10 (Quadriques)

Dessiner les surfaces de $\mathbb{R}^3$:

a) $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$

b) $xy = 1$

c) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 6$

d) $z - 4xy = 0$

e) $z^2 - 4xy = 0$

Exercice 11 (Hyperboloïde à une nappe)

On considère l'hyperboloïde standard à une nappe H défini par l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

a) Montrer que l'image de $t \mapsto [\cos(u) - t\sin(u), \sin(u) + t\cos(u), t] \in \mathbb{R}^3$ est une droite contenue dans H.

b) Montrer que H est une réunion de droites deux à deux disjointes.

c) Déterminer une autre famille de droites dont la réunion est H.

d) Est-ce que tout hyperboloïde à une nappe est la réunion de droites ?

e) Soit $\mathcal{D}$ une droite non coplanaire avec Oz. Soit R_θ la rotation de θ autour de l'axe Oz. Montrer que $\bigcup_\theta R_\theta(\mathcal{D})$ est un hyperboloïde à une nappe.