

---

## TD2 : ESPACES EUCLIDIENS, NOTIONS DE BASE

---

Questions métriques

### Exercice 1 (Perpendiculaire commune)

On se place dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

- a) Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites distinctes de l'espace. Justifier l'existence d'une perpendiculaire commune à ces deux droites. Sous quelles conditions est-elle unique ?
- b) Donner des équations de la perpendiculaire commune aux droites  $\mathcal{D}_1$  d'équations  $\{x + y - z - 1 = 0, 2x + y + z = 0\}$  et  $\mathcal{D}_2$  déterminée par le point  $A$  de coordonnées  $(1, 0, 1)$  et le vecteur directeur  $\vec{u}$  de composantes  $(1, -1, 0)$ .
- c) Quelle est la distance entre  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ?

### Exercice 2 (Distance pondérée à un ensemble de points)

Soit  $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  un système pondéré de  $n$  points d'un espace affine euclidien de poids total  $\sum_{i=1}^n \lambda_i$  non nul. Pour tout point  $M$  on définit la fonction

$$\phi(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\overrightarrow{MA_i}|^2.$$

- a) Soit  $G$  le barycentre du système pondéré  $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ , montrer que :

$$\phi(M) = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) |\overrightarrow{MG}|^2 + \phi(G).$$

- b) Discuter des lignes de niveau de la fonction  $\phi$  dans le plan et dans l'espace.

### Exercice 3 (L'espace euclidien des matrices)

On se place dans l'espace vectoriel  $M_3(\mathbb{R})$  des matrices  $3 \times 3$ .

- a) Rappeler comment munir  $M_3(\mathbb{R})$  d'une structure d'espace euclidien. En donner une base orthonormée.
- b) Donner une base orthonormée de l'espace des matrices antisymétriques.
- c) Calculer l'orthogonal des matrices antisymétriques.

- d) Calculer la distance de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  au sous-espace des matrices diagonales.

**Exercice 4** (Théorème de Sylvester-Gallai)

- a) Étant donné un nombre fini de points dans un plan affine (euclidien), montrer qu'on a l'alternative suivante :
- soit tous les points sont alignés,
  - soit il existe une droite qui contient exactement deux points de l'ensemble.

*Indication : Considérer un couple  $(P, \mathcal{D})$ , où  $\mathcal{D}$  est une droite contenant au moins deux points de l'ensemble et  $P \notin \mathcal{D}$  est un point de l'ensemble, tel que la distance  $d(P, \mathcal{D})$  est minimale.*

- b) Est-ce que la question précédente reste vraie si les points sont dans un espace de dimension quelconque ?
- c) Est-ce que la première question reste vraie pour un nombre infini de points ?

Convexes

**Exercice 5** (Convexes euclidiens)

Soient  $\mathcal{C}$  un convexe fermé non vide d'un espace euclidien et  $P \notin \mathcal{C}$  un point de cet espace.

- a) Montrer qu'il existe un unique point  $Q \in \mathcal{C}$  tel que  $d(P, Q) = d(P, \mathcal{C})$ .  
*On dit que  $Q$  est la projection de  $P$  sur  $\mathcal{C}$ .*
- b) Montrer que l'hyperplan  $\mathcal{H}$  passant par  $Q$  et orthogonal à  $\overrightarrow{QP}$  est un *plan de support*, c'est-à-dire que  $\mathcal{H}$  rencontre  $\mathcal{C}$ , mais pas son intérieur.
- c) Montrer que tout convexe fermé peut s'écrire comme l'intersection de demi-espaces affines.
- d) Est-ce que la question précédente reste vraie si on se place dans un espace affine de dimension finie, plutôt que dans un espace euclidien ?

**Exercice 6** (Séparation de convexes)

Étant donnés deux convexes compacts non vides disjoints dans un espace affine de dimension finie, montrer qu'il existe un hyperplan qui les sépare strictement (c'est-à-dire qu'il ne les rencontre pas et que les deux convexes ne sont pas dans le même demi-espace délimité par cet hyperplan).

## Isométries

### Exercice 7 (Isométries du triangle)

- a) Déterminer le groupe des isométries d'un triangle dans le plan<sup>1</sup>, la discussion sera menée en fonction des propriétés métriques du triangle.
- b) Même question avec un quadrilatère.

### Exercice 8 (Isométries du tétraèdre)

Montrer que le groupe des isométries affines qui préserve un tétraèdre régulier est isomorphe à  $\mathfrak{S}_4$ , le groupe de permutations de 4 points.

### Exercice 9 (Étude d'isométries du plan)

On considère le plan  $\mathbb{R}^2$  muni de sa structure euclidienne standard. Soient les applications suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (x + 3y + 1, -3x + y) & f_2(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y + 1, 2x + y - 1) \\ f_3(x, y) &= \frac{1}{5}(3x + 4y - 1, 4x - 3y + 2) & f_4(x, y) &= (x + 3, y) \\ f_5(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + \sqrt{2}, -x - y - 2 + \sqrt{2}) & f_6(x, y) &= (\sqrt{x^2 + y^2}, x + y) \end{aligned}$$

- a) Lesquelles de ces applications sont des isométries ?
- b) Lesquelles des isométries sont directes ?
- c) Pour chacune des isométries déterminer sa nature et ses paramètres ?
- d) Décomposer ces isométries en produit de réflexions ?

### Exercice 10 (Étude d'isométries de l'espace)

- a) Soient  $R$  et  $T$  une rotation et une translation de  $\mathbb{R}^3$ . Quelle est la nature de  $T \circ R$  ?
- b) Soit l'isométrie de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Décrire la nature et les paramètres de cette isométrie.
- c) On considère la même matrice  $R$ . Décrire la nature et les paramètres de l'isométrie affine  $X \mapsto RX + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- d) Soit l'isométrie de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ . Décrire la nature et les paramètres de cette isométrie.
- e) Quelle est la composée de trois symétries de plans parallèles de  $\mathbb{R}^3$  ?

---

1. Il s'agit des isométries qui préservent l'ensemble des sommets du triangle.

**Exercice 11** (Capes 2007, 2<sup>e</sup> épreuve)

**Partie V. GROUPES DIÉDRAUX**

1. Soit  $E$  un plan affine euclidien orienté. Soit  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ . On appelle groupe diédral d'ordre  $2p$ , noté  $D_{2p}$ , le groupe des isométries laissant invariant un polygone régulier

$$\mathcal{P}_p = \{M_0, \dots, M_{p-1}\}$$

à  $p$  sommets, parcourus dans le sens direct. On pose  $M_p = M_0$ .

- Montrer que le sous-groupe  $C_p$  de  $D_p$  constitué des isométries directes est un groupe cyclique d'ordre  $p$  engendré par la rotation  $\rho$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{p}$ , où  $O$  est le centre du polygone  $\mathcal{P}_p$ .
- Préciser une symétrie orthogonale  $\sigma$  laissant le polygone  $\mathcal{P}_p$  invariant.
- Montrer que

$$D_{2p} = \{\rho^i \circ \sigma^j; i \in \{1, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\}$$

et en déduire que  $D_{2p}$  est un groupe d'ordre  $2p$ .

- Soit  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ . Montrer que  $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma = \rho^{p-k}$ .

Géométrie projective sans le dire

**Exercice 12** (points cocycliques et le théorème de Ptolémée)

On se donne 4 points distincts  $A, B, C$  et  $D$  du plan complexe d'affixes  $a, b, c$  et  $d$  respectivement.

- Montrer que l'on a toujours

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$$

avec égalité si et seulement si il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que  $(b-a)(d-c) = \lambda(d-a)(c-b)$ .

- Déduire de la question précédente que le cas d'égalité est équivalent à

$$\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) - \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) = \pm\pi.$$

- Montrer le théorème de Ptolémée :

*Un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle si et seulement si le produit des longueurs de ses diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.*

### Exercice 13 (Birapports)

Soient 4 points du plan complexe avec affixes  $a, b, c, d$  distincts deux à deux. On définit leur birapport comme étant la quantité :

$$[a, b, c, d] = \frac{a - c}{b - c} \cdot \frac{b - d}{a - d} \in \mathbb{C}.$$

- a) Montrer que si 4 points sont alignés alors leur birapport est un nombre réel. Dans quel cas ce birapport est positif ?
- b) Montrer que si 4 points sont cocycliques alors leur birapport est un nombre réel. Dans quel cas ce birapport est positif ?
- c) Montrer que le birapport de 4 points est réel si et seulement si les 4 points sont alignés ou cocycliques.
- d) Prouver que si 4 points d'affixes non nulles sont alignés alors leurs images par  $1/\bar{z}$  sont alignées ou cocycliques.
- e) Montrer que les homothéties de rapport non nul, les rotations et les translations préservent les birapports, et que les symétries les transforment en leurs conjugués.
- f) Montrer que les points d'affixes  $-2 + 6i, 1 + 7i, 4 + 6i, 6 + 2i$  sont cocycliques.

### Exercice 14 (Inversions)

Une inversion  $i(\Omega, r)$  de centre  $\Omega$  et de rapport  $r \in \mathbb{R}_+^*$  est une application du plan  $P$  privé de  $\Omega$  dans  $P$  qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que

- $M'$  soit sur la droite  $\Omega M$ ,
- $\overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M'} = r^2$ .

- a) Déterminer l'image de  $i(\Omega, r)$ .
- b) Montrer que l'inversion est une involution.
- c) En identifiant le plan  $P$  avec  $\mathbb{C}$ , donner l'expression analytique de l'inversion  $i(0, 1)$ , puis, plus généralement, de  $i(\omega, r)$  avec  $\omega \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ .
- d) Montrer que chaque point du cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  est invariant par l'inversion.
- e) Montrer qu'une inversion transforme un birapport en son conjugué.
- f) Montrer que l'inversion préserve les droites qui passent par  $\Omega$ .
- g) Montrer qu'elle envoie une droite qui ne passe pas par  $\Omega$  sur un cercle qui passe par  $\Omega$ .
- h) Montrer aussi qu'elle envoie tout cercle qui ne passe pas par  $\Omega$  sur un cercle qui ne passe pas par  $\Omega$ .

### Exercice 15 (Homographies)

Une homographie est une application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec  $a, b, c, d$  complexes, tels que  $ad - bc \neq 0$ .

- Montrer que toute homographie est la composée de translations, d'homothéties et au plus d'une inversion et d'une réflexion.
- Montrer que toute homographie envoie droites ou cercles sur droites ou cercles.
- Montrer que les homographies forment un groupe.

### Exercice 16

Deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont tangents intérieurement en  $O$ . On considère une famille de cercles deux à deux tangents entre eux et tangents à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . Montrer que les points de contact de ces cercles entre eux sont situés sur un même cercle tangent en  $O$  aux deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .

