# SOLUTIONS DU RATTRAPAGE

14 juin 2018

[ durée : 3 heures ]

**Exercice 1** (Géométrie du plan complexe et barycentres)

On considère trois points $A_1$, $A_2$ et $A_3$ du plan complexe dont les affixes $z_1$, $z_2$ et $z_3$ sont les racines complexes du polynôme $P(Z) = Z^3 + 2Z + \sqrt{3}$, fixées arbitrairement une fois pour toutes.

**a)** Déterminer l'affixe de l'isobarycentre des trois points $A_1$, $A_2$ et $A_3$.
*Indication : Rappeler comment s'expriment les coefficients de $P$ en fonction de ses racines.*

**b)** Montrer que pour $A_1$, $A_2$ et $A_3$ fixés, le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{MA_1} - 2\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3}$ ne dépend pas du choix du point $M$.

**c)** Déterminer l'affixe de $\vec{v}$ en fonction de $z_1$, $z_2$ et $z_3$, puis montrer que $\vec{v} \neq 0$.

**Solution :**

**a)** Comme le coefficient devant $Z^2$ est 0 on trouve la somme des trois racines $z_1+z_2+z_3 = 0$, d'où l'isobarycentre de $A_1$, $A_2$ et $A_3$ est le point $O$ d'affixe $\frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 + \frac{1}{3}z_3 = 0$.

**b)** Comme $1 + (-2) + 1 = 0$, d'après le cours le vecteur $\overrightarrow{MA_1} - 2\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3}$ ne dépend pas du point $M$, on le note $A_1 - 2A_2 + A_3$ et son affixe est $z_1 - 2z_2 + z_3$.

**c)** D'après la question précédente l'affixe de $\vec{v}$ est $z_1 - 2z_2 + z_3$. Si on suppose que $z_1 - 2z_2 + z_3 = 0$, comme $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ on trouve $z_2 = 0$, mais 0 n'est pas racine de $P$. Donc $\vec{v} \neq 0$ car son affixe $z_1 - 2z_2 + z_3 \neq 0$.

**Exercice 2** (Espaces affines et transformations affines)

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel et $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n = Id_{\mathcal{E}}$. Montrer que $T$ a au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathcal{E}$ vérifiant $T(p) = p$.

*Indication : On pourra construire un tel $p$ en partant de $v \in \mathcal{E}$ quelconque et en regardant la suite $\big(v, T(v), T^2(v), \dots, T^{n-1}(v)\big)$.*

**Solution :** On suit l'indication : soit $v \in \mathcal{E}$ arbitraire. On pose $p = \frac{1}{n}v + \frac{1}{n}T(v) + \cdots + \frac{1}{n}T^{n-1}(v)$, l'isobarycentre des points $\big(v, T(v), \ldots, T^{n-1}(v)\big)$. Comme $T$ préserve les barycentres, on a $T(p) = T\big(\frac{1}{n}v + \frac{1}{n}T(v) + \cdots + \frac{1}{n}T^{n-1}(v)\big) = \frac{1}{n}T(v) + \frac{1}{n}T^2(v) + \cdots + \frac{1}{n}T^n(v)$. Et comme $T^n(v) = v$ on trouve $T(p) = p$. Ainsi $T$ a au moins un point fixe, le point $p$.

**Exercice 3** (Espaces euclidiens et isométries)

On considère l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne standard. Soit l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dont l'expression dans la base canonique est

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{9}(7x - 4y - 4z + 9, -4x + y - 8z + 27, -4x - 8y + z + 9).$$

**a)** Montrer que $\phi$ est une application affine.

**b)** Donner la matrice $M_{\vec{\phi}}$ de la partie linéaire de $\phi$ dans la base canonique.

**c)** Montrer que $\phi$ est une isométrie.

**d)** Déterminer la nature et les paramètres de la partie linéaire $\vec{\phi}$.

**e)** Déterminer la nature et les paramètres de $\phi$.

**Solution :**

**a)** Nous avons $\phi(x, y, z) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $\phi$ est une application de $\mathbb{R}^3$ de la forme $X \mapsto AX + B$, et donc d'après le cours c'est une application affine.

**b)** D'après le cours la partie linéaire de $X \mapsto AX + B$ est $X \mapsto AX$ qui a pour matrice dans la base canonique $A$. Ainsi d'après la question précédente $M_{\vec{\phi}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

**c)** Comme les trois vecteurs colonnes forment une base orthonormée (à vérifier), la matrice $M_{\vec{\phi}}$ est orthogonale et donc $\phi$ est une isométrie.

**d)** Comme $\det M_{\vec{\phi}} = -1$, la partie linéaire $\vec{\phi}$ est une anti-rotation ou réflexion. On trouve facilement que l'ensemble des vecteurs $(-1)$-propres (l'axe de rotation) est $\langle(1, 2, 2)\rangle$ et que l'angle de rotation $\theta$ vérifie $2\cos(\theta) - 1 = \operatorname{tr} M_{\vec{\phi}} = 1 \implies \theta = 0 (\operatorname{mod} 2\pi)$. Donc $\vec{\phi}$ est une réflexion* par rapport au plan $\langle(1, 2, 2)\rangle^{\perp}$.

---

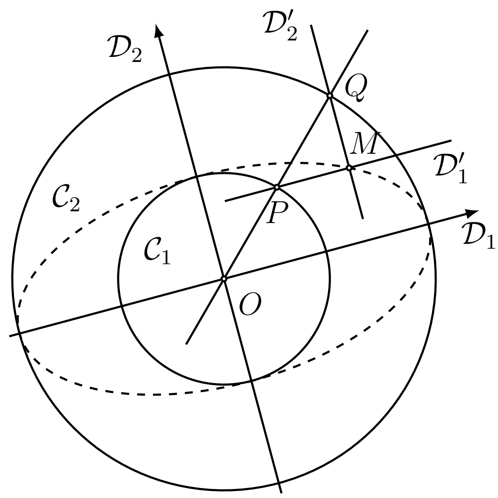
*. Pour dire que $\vec{\phi}$ est une symétrie, on aurait pu également utiliser le fait que $M_{\vec{\phi}}$ est symétrique, puis chercher les points fixes à la place des vecteurs $(-1)$-propres.

**e)** On décompose le vecteur $(1,3,1) = (1,2,2) + (0,1,-1)$ avec $(1,2,2) \in \langle(1,2,2)\rangle$ et $(0,1,-1) \in \langle(1,2,2)\rangle^{\perp}$. D'après le cours

$$T_{\overrightarrow{(1,2,2)}} \circ M_{\vec{\phi}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

est une réflexion par rapport à un hyperplan de direction $\langle(1,2,2)\rangle^{\perp}$. En cherchant ses points fixes qui vérifient $\frac{1}{9}(7x-4y-4z+9, -4x+y-8z+18, -4x-8y+z+18) = (x,y,z)$ on trouve que son hyperplan de réflexion est $(\frac{1}{2},1,1) + \langle(1,2,2)\rangle^{\perp}$. Pour finir on peut dire, d'après le cours, que comme $(0,1,-1)$ est dans la direction du plan de réflexion de $T_{\overrightarrow{(1,2,2)}} \circ M_{\vec{\phi}}$ alors $\phi$ est une réflexion glissée par rapport à l'hyperplan $(\frac{1}{2},1,1) + \langle(1,2,2)\rangle^{\perp}$ et de vecteur de translation $(0,1,-1)$.

**Exercice 4** (Coniques)




Soient deux droites orthogonales $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui se coupent en un point $O$, et deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centre $O$ et de rayons respectifs $r$ et $R$ avec $0 < r < R$.

Pour tout point $Q$ sur $\mathcal{C}_2$, soit $P = \mathcal{C}_1 \cap [O,Q]$. Soient $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ les deux droites parallèles à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et passant par $P$ et $Q$ respectivement.

On considère le point d'intersection de ces deux droites $M = \mathcal{D}'_1 \cap \mathcal{D}'_2$.

Montrer que quand $Q$ parcourt $\mathcal{C}_2$ le point $M$ parcourt une ellipse.

**Solution :**

On se place dans un repère orthonormé de centre $O$ et d'axes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Dans ce repère si $P = (x_P, y_P)$ et $Q = (x_Q, y_Q)$, alors d'une part $(x_P, y_P) = \frac{r}{R}(x_Q, y_Q)$, car $P$ est l'image de $Q$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\frac{r}{R}$, et d'autre part $M = (x_Q, y_P)$ par la construction de $M$, et donc $M = (x_Q, \frac{r}{R}y_Q)$.

Ainsi quand $Q$ parcourt $\mathcal{C}_2$ ayant pour équation $\left\{x^2+y^2=R^2\right\}$, $M$ parcourt l'image de $\mathcal{C}_2$ par l'affinité $(x,y) \mapsto (x, \frac{r}{R}y)$ [†], qui est l'ellipse dont l'équation dans ce repère orthonormé est

$$x^2 + \left(\frac{R}{r}y\right)^2 = R^2 \iff \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

†. dont l'inverse est l'affinité $(x,y) \mapsto (x, \frac{R}{r}y)$.