RATTRAPAGE

14 juin 2018

[durée : 3 heures]

⚠ **Documents autorisés :** *Une feuille A4 recto-verso écrite à la main.*

Exercice 1 (Géométrie du plan complexe et barycentres)

On considère trois points A_1, A_2 et A_3 du plan complexe dont les affixes z_1, z_2 et z_3 sont les racines complexes du polynôme $P(Z) = Z^3 + 2Z + \sqrt{3}$, fixées arbitrairement une fois pour toutes.

a) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre des trois points A_1, A_2 et A_3.
Indication : Rappeler comment s'expriment les coefficients de P en fonction de ses racines.

b) Montrer que pour A_1, A_2 et A_3 fixés, le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{MA_1} - 2\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3}$ ne dépend pas du choix du point M.

c) Déterminer l'affixe de $\vec{v}$ en fonction de z_1, z_2 et z_3, puis montrer que $\vec{v} \neq 0$.

Exercice 2 (Espaces affines et transformations affines)

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel et $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n = Id_{\mathcal{E}}$. Montrer que T a au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathcal{E}$ vérifiant $T(p) = p$.

Indication : On pourra construire un tel p en partant de $v \in \mathcal{E}$ quelconque et en regardant la suite $\big(v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{n-1}(v)\big)$.

T.S.V.P.

Exercice 3 (Espaces euclidiens et isométries)

On considère l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne standard. Soit l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dont l'expression dans la base canonique est

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{9}(7x - 4y - 4z + 9, -4x + y - 8z + 27, -4x - 8y + z + 9).$$

a) Montrer que ϕ est une application affine.

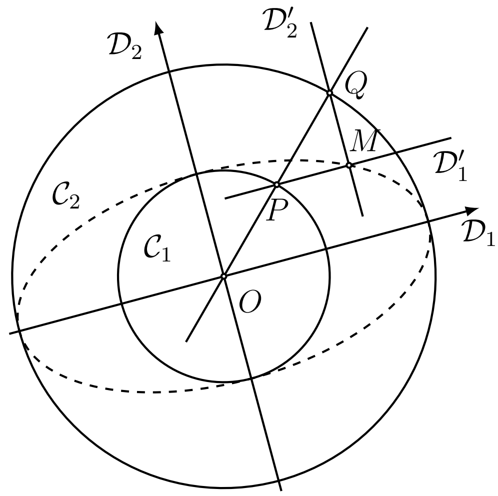
b) Donner la matrice $M_{\vec{\phi}}$ de la partie linéaire de ϕ dans la base canonique.

c) Montrer que ϕ est une isométrie.

d) Déterminer la nature et les paramètres de la partie linéaire $\vec{\phi}$.

e) Déterminer la nature et les paramètres de ϕ.

Exercice 4 (Coniques)



Soient deux droites orthogonales $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui se coupent en un point O, et deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centre O et de rayons respectifs r et R avec $0 < r < R$.

Pour tout point Q sur $\mathcal{C}_2$, soit $P = \mathcal{C}_1 \cap [O, Q]$. Soient $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ les deux droites parallèles à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et passant par P et Q respectivement.

On considère le point d'intersection de ces deux droites $M = \mathcal{D}'_1 \cap \mathcal{D}'_2$.

Montrer que quand Q parcourt $\mathcal{C}_2$ le point M parcourt une ellipse.