EXAMEN FINAL

13 janvier 2017

[durée : 3 heures]

⚠ **Documents autorisés :** *Une feuille A4 recto-verso écrite à la main.*

Exercice 1 (Géométrie du plan complexe)

On se place dans le plan complexe. Soit l'application $\phi : \mathbb{C} \setminus \{3i\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\phi(z) = \frac{z-2}{iz+3} \qquad \text{pour } z \neq 3i.$$

a) Déterminer et dessiner l'ensemble $\phi^{-1}(\mathbb{R})$.

b) Déterminer et dessiner l'ensemble $\phi^{-1}(i\mathbb{R})$.

Indication : Dans les deux questions, vous pouvez déterminer les couples de réels (x, y) tels que $z = x + iy$ soit dans l'ensemble recherché.

Exercice 2 (Espaces affines et transformations affines)

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Pour $\Omega \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $H_{\Omega,\lambda}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \neq 1$. Et pour $\vec{v} \in \vec{E}$, on désigne par $T_{\vec{v}}$ la translation du vecteur $\vec{v}$.

a) Déterminer la nature et les paramètres de $H_{\Omega,\lambda} \circ T_{\vec{v}}$.

b) Déterminer la nature et les paramètres de $T_{\vec{v}} \circ H_{\Omega,\lambda}$.

c) Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine des polynômes de degré 2. Déterminer l'image de $P(X) = X^2 + 2X$ par l'homothétie de centre $\Omega(X) = (X-1)(X+1)$ et de rapport -2.

T.S.V.P.

Exercice 3 (Espaces euclidiens et isométries)

On considère l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne standard. Soit l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dont l'expression dans la base canonique est

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 3, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z).$$

a) Montrer que ϕ est une application affine.

b) Donner la matrice $M_{\vec{\phi}}$ de la partie linéaire de ϕ.

c) Montrer que ϕ est une isométrie.

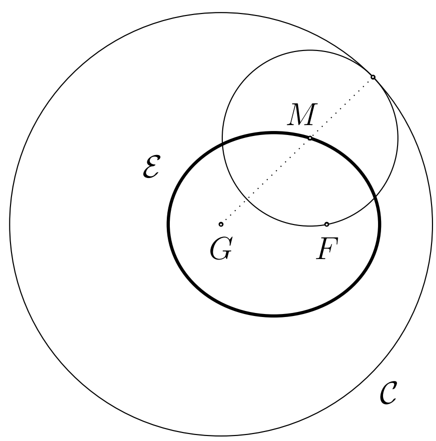
d) Déterminer la nature et les paramètres de la partie linéaire $\vec{\phi}$.

e) Déterminer la nature et les paramètres de ϕ.

Exercice 4 (Coniques)

a) Soient deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs O_1 et O_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 > R_2$. Donner et justifier la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C}_2$ soit tangent intérieurement à $\mathcal{C}_1$.

Soient F et G deux points du plan euclidien, et $\mathcal{C}$ un cercle de centre G et de rayon $R > d(F, G)$.



b) On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des centres Ω des cercles tangents intérieurement à $\mathcal{C}$ et passant par G. Déterminer et dessiner l'ensemble $\mathcal{S}$.

c) On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des centres M des cercles tangents intérieurement à $\mathcal{C}$ et passant par F. Montrer que cet ensemble est une ellipse, appelée ellipse de cercle directeur $\mathcal{C}$ et de foyer F, dont on précisera les paramètres.

d) Décrire et indiquer sur une figure les points de l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{E}$.

e) Est-ce que toute ellipse est l'ellipse d'un certain cercle directeur $\mathcal{C}$ et d'un certain foyer F ?