SOLUTIONS DE L'INTERROGATION

7 novembre 2017

[durée : 2 heures]

Exercice 1 (Espaces euclidiens)

a) *(Question de cours)* Démontrer le résultat suivant vu en cours :

> *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ dont la distance est notée d.*
> *Montrer que si $M \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{B}$ vérifient $\overrightarrow{MN} \perp \left(\vec{\mathcal{A}} \oplus \vec{\mathcal{B}}\right)$, alors*
> $$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(M, N).$$

b) Parmi les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y)(y - z) = 0\},$$
$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y)^2 = 0\},$$
$$\mathcal{C} = \{(1 + t, 2 + t, 3) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

déterminer (en justifiant) lesquels sont des sous-espaces affines.

c) Trouver un repère cartésien pour chacun des sous-espaces affines de la question précédente.

d) Déterminer la distance entre les deux sous espaces affines de la question b).

Solution :

a) Soient $M \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{B}$ qui vérifient $\overrightarrow{MN} \perp \left(\vec{\mathcal{A}} \oplus \vec{\mathcal{B}}\right)$. Soient $K \in \mathcal{A}$, $L \in \mathcal{B}$, alors en appliquant le théorème de Pythagore on a $\|\overrightarrow{KL}\|^2 = \|\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NL}\|^2 = \|\overrightarrow{MN}\|^2 + \|\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{NL}\|^2 \geq \|\overrightarrow{MN}\|^2$, car $\overrightarrow{MN} \perp (\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{NL})$ vu que $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{NL} \in \left(\vec{\mathcal{A}} \oplus \vec{\mathcal{B}}\right)$.
Ainsi $d(K, L) \geq d(M, N)$ et donc $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{K \in \mathcal{A}, L \in \mathcal{B}} d(K, L) \geq d(M, N)$.
Nous avons aussi $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{K \in \mathcal{A}, L \in \mathcal{B}} d(K, L) \leq d(M, N)$ car $M \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{B}$.
Ainsi on trouve $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(M, N)$.

b) $\mathcal{A}$ n'est pas un sous-espace affine car $(1,1,0) \in \mathcal{A}$ et $(0,1,1) \in \mathcal{A}$, mais leur isobarycentre $\frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) \notin \mathcal{A}$.
$\mathcal{B}$ est un sous-espace linéaire car $\mathcal{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$ vu que $x - y = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0$ et ainsi $\mathcal{B} = \operatorname{Ker}\varphi$, où $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ est l'application linéaire définie par $\varphi(x,y,z) = x - y$. Ainsi $\mathcal{B}$ est un sous-espace affine avec $\overrightarrow{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$.
$\mathcal{C} = \{(1,2,3) + t(1,1,0) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} = (1,2,3) + \langle (1,1,0) \rangle$ est la droite affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{C}} = \langle (1,1,0) \rangle$ qui passe par le point $(1,2,3)$.

c) D'après le théorème du rang pour l'application $\overrightarrow{\varphi}$, définie dans la question précédente, nous avons $\dim \overrightarrow{\mathcal{B}} = 3 - 1 = 2$. Les vecteurs $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,0) \in \overrightarrow{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{v}_2 = (0,0,1) \in \overrightarrow{\mathcal{B}}$ forment une famille libre, donc une base de $\overrightarrow{\mathcal{B}}$. Ainsi $\{O, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\} = \{(0,0,0), (1,1,0), (0,0,1)\}$ est un repère cartésien de $\mathcal{B} = \overrightarrow{\mathcal{B}}$.
Comme $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,0)$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ et $\Omega = (1,2,3)$ est un point de $\mathcal{C}$, on trouve que $\{\Omega, \overrightarrow{v}_1\} = \{(1,2,3), (1,1,0)\}$ est un repère cartésien de $\mathcal{C}$.

d) Pour déterminer $d(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ on cherche $M = (0,0,0) + s(1,1,0) + t(0,0,1) \in \mathcal{B}$ et $N = (1,2,3) + u(1,1,0) \in \mathcal{C}$ tels que $\overrightarrow{MN} \perp (\overrightarrow{\mathcal{B}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{C}})$. Ainsi comme $\overrightarrow{\mathcal{B}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{C}} = \langle \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2 \rangle$ et $\overrightarrow{MN} = (1+u-s, 2+u-s, 3-t)$ on cherche s,t et u tels que $\langle (1+u-s, 2+u-s, 3-t) | (1,1,0) \rangle = 0$ et $\langle (1+u-s, 2+u-s, 3-t) | (0,0,1) \rangle = 0$. En résolvant le système on trouve $u - s = -\frac{3}{2}$ et $t = 3$. Ainsi $\|\overrightarrow{MN}\| = \|(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $d(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2 (Transformations affines)

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels.

a) Soit $\phi(P)(X) = X^2 \left(P(\frac{1}{X}) + 1\right)$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que ϕ est un automorphisme affine de $\mathbb{R}_2[X]$.

Étant donnés $\Omega \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $h_{\Omega,\lambda}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.

b) Calculer $h_{X,2}(X^2 + 1)$.

c) Justifier que la composée $h_{X,2} \circ h_{X^2,\frac{1}{3}}$ est une homothétie. Puis déterminer ses paramètres (son centre et son rapport).

d) Est-ce que $h_{X,2} \circ h_{X^2,\frac{1}{2}}$ est une homothétie ? Justifier votre réponse.

e) Justifier que $h_{X,2}$ est un automorphisme affine et déterminer son inverse.

Solution :

a) Soit $P(X) = a + bX + cX^2$, on trouve $\phi(P)(X) = X^2 \left(a + b\frac{1}{X} + c\frac{1}{X^2} + 1\right) = c + bX + (a+1)X^2$. Pour voir que ϕ est une application affine il suffit de remarquer que $\phi(0 + P) = \phi(0) + \overrightarrow{\phi}(P)$ où $\phi(0) = X^2$ et $\overrightarrow{\phi}$ est l'application linéaire qui permute a et c, c.-à-d. $\overrightarrow{\phi}(a + bX + cX^2) = c + bX + aX^2$. Et maintenant pour conclure il suffit d'utiliser que ϕ

est un automorphisme affine si et seulement si $\overrightarrow{\phi}$ est un automorphisme linéaire, ce qui est le cas car $\overrightarrow{\phi} \circ \overrightarrow{\phi} = \mathrm{Id}$.

b) Nous avons $h_{\Omega,\lambda}(P) = (1-\lambda)\Omega + \lambda P$. Ainsi $h_{X,2}(X^2+1) = (1-2)X + 2(X^2+1) = 2 - X + 2X^2$.

c) Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a $h_{X,2} \circ h_{X^2,\frac{1}{3}}(P) = h_{X,2}\left(\frac{2}{3}X^2 + \frac{1}{3}P\right) = -X + 2\left(\frac{2}{3}X^2 + \frac{1}{3}P\right) = \frac{1}{3}(4X^2 - 3X) + \frac{2}{3}P$. Donc $h_{X,2} \circ h_{X^2,\frac{1}{3}} = h_{4X^2-3X,\frac{2}{3}}$ est l'homothétie de centre $4X^2 - 3X$ est de rapport $\frac{2}{3}$.

d) Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a $h_{X,2} \circ h_{X^2,\frac{1}{2}}(P) = h_{X,2}\left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}P\right) = -X + 2\left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}P\right) = (X^2 - X) + P$. Ainsi $h_{X,2} \circ h_{X^2,\frac{1}{2}}$ n'est pas une homothétie, mais la translation par le vecteur (polynôme) $X^2 - X$.

e) Comme toute homothétie de rapport non nul, $h_{X,2}$ est un automorphisme affine dont l'inverse est l'homothétie du même centre et du rapport inverse, c.-à-d. $h_{X,\frac{1}{2}}$.

Exercice 3 (Géométrie du plan et barycentres)

Soient A, B et C trois points fixes d'un plan affine euclidien. On se propose dans cet exercice de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M qui vérifient

$$\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

a) Montrer que $B \in \mathcal{S}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ ne dépend pas du choix du point M.

c) Soit G le barycentre de $(A,1)$, $(B,-4)$ et $(C,1)$. Montrer sur un dessin la position de G par rapport à A, B et C (pris en position générale [1]).

d) Exprimer $\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{GM}$.

e) En déduire que $\mathcal{S}$ est un cercle dont on précisera le centre et qu'on représentera sur un dessin.

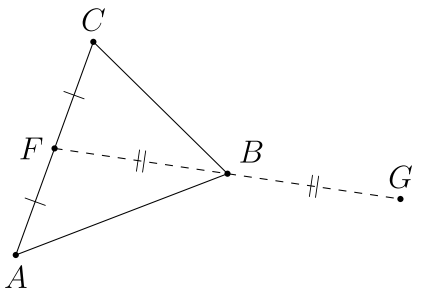
Solution :

a) $\|\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}\|$ car $\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$. Donc $B \in \mathcal{S}$.

b) Soit $M' \in \mathcal{S}$, on a $\overrightarrow{M'A} - 2\overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'C} = (\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MA}) - 2(\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MC}) = (1-2+1)\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ ne dépend pas du choix du point M.

c) Soit $F = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$ l'isobarycentre de A et C, qui est aussi le milieu du segment $[A,C]$. Ainsi nous avons $G = -\frac{1}{2}A + 2B - \frac{1}{2}C = 2B - F$, et donc $B = \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}G$ est le milieu du segment $[F,G]$.

1. C.-à-d. de sorte que le triangle ABC soit non dégénéré.



d) D'après la définition de G nous avons $\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})-4(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})=(1-4+1)\overrightarrow{MG}+(\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=2\overrightarrow{GM}$.

e) D'après b) le nombre $\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$ est indépendant de M, notons le $K=\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\|$ (on a pris $M=B$). Et comme d'après d) nous avons $\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=2\|\overrightarrow{GM}\|$, on trouve que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points M qui vérifient $2\|\overrightarrow{GM}\|=K$, autrement dit c'est le cercle de centre G et de rayon $\frac{K}{2}$, qui d'après a) passe par B.