Interrogation

7 novembre 2017

[durée : 2 heures]

⚠ **Documents autorisés :** *Une feuille A4 recto-verso écrite à la main.*

Exercice 1 (Espaces euclidiens)

a) *(Question de cours)* Démontrer le résultat suivant vu en cours :

> *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ dont la distance est notée d.*
> *Montrer que si $M \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{B}$ vérifient $\overrightarrow{MN} \perp \left(\vec{\mathcal{A}} \oplus \vec{\mathcal{B}}\right)$, alors*
> $$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(M, N).$$

b) Parmi les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y)(y - z) = 0\},$$
$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y)^2 = 0\},$$
$$\mathcal{C} = \{(1 + t, 2 + t, 3) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

déterminer (en justifiant) lesquels sont des sous-espaces affines.

c) Trouver un repère cartésien pour chacun des sous-espaces affines de la question précédente.

d) Déterminer la distance entre les deux sous espaces affines de la question b).

T.S.V.P.

Exercice 2 (Transformations affines)

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels.

a) Soit $\phi(P)(X) = X^2 \left(P(\frac{1}{X}) + 1\right)$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que ϕ est un automorphisme affine de $\mathbb{R}_2[X]$.

Étant donnés $\Omega \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $h_{\Omega,\lambda}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.

b) Calculer $h_{X,2}(X^2 + 1)$.

c) Justifier que la composée $h_{X,2} \circ h_{X^2,\frac{1}{3}}$ est une homothétie. Puis déterminer ses paramètres (son centre et son rapport).

d) Est-ce que $h_{X,2} \circ h_{X^2,\frac{1}{2}}$ est une homothétie ? Justifier votre réponse.

e) Justifier que $h_{X,2}$ est un automorphisme affine et déterminer son inverse.

Exercice 3 (Géométrie du plan et barycentres)

Soient A, B et C trois points fixes d'un plan affine euclidien. On se propose dans cet exercice de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M qui vérifient

$$\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

a) Montrer que $B \in \mathcal{S}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ ne dépend pas du choix du point M.

c) Soit G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, -4)$ et $(C, 1)$. Montrer sur un dessin la position de G par rapport à A, B et C (pris en position générale [1]).

d) Exprimer $\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{GM}$.

e) En déduire que $\mathcal{S}$ est un cercle dont on précisera le centre et qu'on représentera sur un dessin.

1. C.-à-d. de sorte que le triangle ABC soit non dégénéré.