Licence 3ème année, parcours Mathématiques 2017-2018

M53, Géométrie affine et euclidienne

Solutions de l'interrogation

10 octobre 2017

[durée : 1 heure]

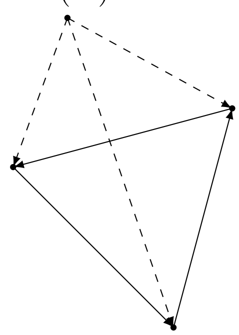
Exercice 1 (Géométrie du plan complexe)

On se place dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Soit ABC un triangle équilatéral positivement orienté dont les sommets ont pour affixes respectifs a, b et c.

a) Exprimer les nombres complexes $c-b$ et $a-c$ en fonction de $b-a$.

b) En utilisant la question précédente, montrer l'identité

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-b}+\frac{1}{a-c}=0.$$



On considère un point arbitraire M d'affixe $m \in \mathbb{C}$.

c) Montrer que l'expression

$$\frac{m-a}{b-a}+\frac{m-b}{c-b}+\frac{m-c}{a-c}$$

ne dépend pas du choix de M.

d) En déduire que pour tout M on a

$$\left|\frac{m-a}{b-a}+\frac{m-b}{c-b}+\frac{m-c}{a-c}\right|=\sqrt{3}.$$

Indication : Choisissez judicieusement un point M particulier.

Solution :

a) Comme le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est l'image par rotation à $+\frac{2\pi}{3}$ de $\overrightarrow{AB}$, on a $(c-b)=e^{i\frac{2\pi}{3}}(b-a)$. De même $(a-c)=e^{-i\frac{2\pi}{3}}(b-a)$.

b) Soit $\xi=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ *, alors $\overline{\xi}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{\xi}$ et $\xi+\overline{\xi}=-1$. Ainsi

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-b}+\frac{1}{a-c}=\frac{1}{b-a}\left(1+\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\overline{\xi}}\right)=\frac{1}{b-a}\left(1+\overline{\xi}+\xi\right)=0.$$

---

*. ξ est une racine troisième de l'unité.

c) En utilisant la question précédente nous avons

$$\frac{m-a}{b-a}+\frac{m-b}{c-b}+\frac{m-c}{a-c}=m\underbrace{\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-b}+\frac{1}{a-c}\right)}_{=0}-\left(\frac{a}{b-a}+\frac{b}{c-b}+\frac{c}{a-c}\right)$$

qui ne dépend pas de m.

d) En choisissant $m=a$ on trouve

$$\frac{m-a}{b-a}+\frac{m-b}{c-b}+\frac{m-c}{a-c}=\frac{a-b}{c-b}+\frac{a-c}{a-c}=e^{i\frac{\pi}{3}}+1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

et donc, en utilisant la question précédente, on trouve que pour tout $m\in\mathbb{C}$ on a

$$\left|\frac{m-a}{b-a}+\frac{m-b}{c-b}+\frac{m-c}{a-c}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}.$$

Exercice 2 (Sous-espaces affines)

a) Montrer que l'ensemble $F\subset\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 et vérifiant

$$\int_0^1 P(x)\,dx=1,\quad \text{pour}\quad P\in F,$$

est un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Donner un repère cartésien, puis un repère affine de F.

c) *[bonus]* Donner un exemple d'application affine de $\mathbb{R}$ dans F.

Solution :

a) Soit $\phi:\mathbb{R}_2[X]\longrightarrow\mathbb{R}$ avec $\phi(P)=\int_0^1 P(x)\,dx$ pour $P\in\mathbb{R}_2[X]$. Comme ϕ est une application linéaire (car l'intégrale est linéaire), d'après le cours, on déduit que $F=\phi^{-1}(1)$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}_2[X]$ de direction $\overrightarrow{F}=\operatorname{Ker}\phi$.

b) D'après la question précédente, pour donner un repère affine de F, il suffit de donner un point de F (par exemple $\Omega=1$, le polynôme constant, convient), et une base de $\overrightarrow{F}$ qui est un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle) dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc de dimension 2. Ainsi les polynômes $\overrightarrow{E_1}(X)=2X-1$ et $\overrightarrow{E_2}(X)=3X^2-1$ conviennent car ils forment une famille libre (ils n'ont pas le même degré) de deux vecteurs de $\overrightarrow{F}=\operatorname{Ker}\phi$ (en effet $\phi(\overrightarrow{E_1})=\int_0^1 2X-1\,dx=0$ et $\phi(\overrightarrow{E_2})=\int_0^1 3X^2-1\,dx=0$).
Pour conclure, $\left\{\Omega,\overrightarrow{E_1},\overrightarrow{E_2}\right\}=\{1,2X-1,3X^2-1\}$ est un repère cartésien, et donc $\left\{\Omega,\Omega+\overrightarrow{E_1},\Omega+\overrightarrow{E_2}\right\}=\{1,2X,3X^2\}$ est un repère affine.

c) Par exemple $\psi:\alpha\mapsto\Omega+\alpha\overrightarrow{E_1}=1+\alpha(2X-1)$ convient [†], avec $\psi(0)=1\in F$ et $\overrightarrow{\psi}\in\mathcal{L}(\mathbb{R},\overrightarrow{F})$ étant donné par $\overrightarrow{\psi}(\alpha)=\alpha(2X-1)$.

†. C'est une paramétrisation de la droite affine $\langle 1,2X\rangle$.