Licence 3ème année, parcours Mathématiques — 2017-2018

M53, Géométrie affine et euclidienne

Interrogation

10 octobre 2017

[durée : 1 heure]

⚠ **Aucun document n'est autorisé.**

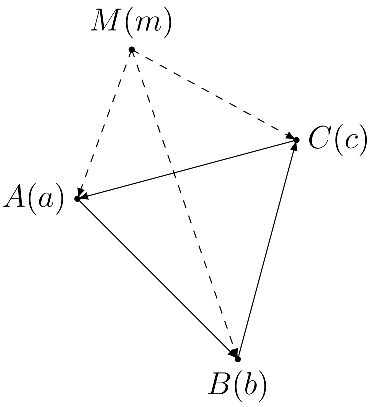
Exercice 1 (Géométrie du plan complexe)

On se place dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Soit ABC un triangle équilatéral positivement orienté dont les sommets ont pour affixes respectifs a, b et c.

a) Exprimer les nombres complexes $c-b$ et $a-c$ en fonction de $b-a$.

b) En utilisant la question précédente, montrer l'identité

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-b}+\frac{1}{a-c}=0.$$



On considère un point arbitraire M d'affixe $m \in \mathbb{C}$.

c) Montrer que l'expression

$$\frac{m-a}{b-a}+\frac{m-b}{c-b}+\frac{m-c}{a-c}$$

ne dépend pas du choix de M.

d) En déduire que pour tout M on a

$$\left|\frac{m-a}{b-a}+\frac{m-b}{c-b}+\frac{m-c}{a-c}\right|=\sqrt{3}.$$

Indication : Choisissez judicieusement un point M particulier.

Exercice 2 (Sous-espaces affines)

a) Montrer que l'ensemble $F \subset \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 et vérifiant

$$\int_0^1 P(x)\,dx = 1, \quad \text{pour} \quad P \in F,$$

est un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Donner un repère cartésien, puis un repère affine de F.

c) *[bonus]* Donner un exemple d'application affine de $\mathbb{R}$ dans F.