
TD2 : ESPACES EUCLIDIENS, NOTIONS DE BASE

Questions métriques

Exercice 1 (Perpendiculaire commune)

On se place dans l'espace \mathbb{R}^3 .

- a) Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites distinctes de l'espace. Justifier l'existence d'une perpendiculaire commune à ces deux droites. Sous quelles conditions est-elle unique ?
- b) Donner des équations de la perpendiculaire commune aux droites \mathcal{D}_1 d'équations $\{x + y - z - 1 = 0, 2x + y + z = 0\}$ et \mathcal{D}_2 déterminée par le point A de coordonnées $(1, 0, 1)$ et le vecteur directeur \vec{u} de composantes $(1, -1, 0)$.
- c) Quelle est la distance entre \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ?

Exercice 2 (Distance pondérée à un ensemble de points)

Soit $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système pondéré de n points d'un espace affine euclidien de poids total $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ non nul. Pour tout point M on définit la fonction

$$\phi(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\overrightarrow{MA_i}|^2.$$

- a) Soit G le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$, montrer que :

$$\phi(M) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) |\overrightarrow{MG}|^2 + \phi(G).$$

- b) Discuter des lignes de niveau de la fonction ϕ dans le plan et dans l'espace.

Exercice 3 (L'espace euclidien des matrices)

On se place dans l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$ des matrices 3×3 .

- a) Rappeler comment munir $M_3(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace euclidien. En donner une base orthonormée.
- b) Donner une base orthonormée de l'espace des matrices antisymétriques.
- c) Calculer l'orthogonal des matrices antisymétriques.

- d) Calculer la distance de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ au sous-espace des matrices diagonales.

Exercice 4 (Théorème de Sylvester-Gallai)

- a) Étant donné un nombre fini de points dans un plan affine (euclidien), montrer qu'on a l'alternative suivante :
- soit tous les points sont alignés,
 - soit il existe une droite qui contient exactement deux points de l'ensemble.

Indication : Considérer un couple (P, \mathcal{D}) , où \mathcal{D} est une droite contenant au moins deux points de l'ensemble et $P \notin \mathcal{D}$ est un point de l'ensemble, tel que la distance $d(P, \mathcal{D})$ est minimale.

- b) Est-ce que la question précédente reste vraie si les points sont dans un espace de dimension quelconque ?
- c) Est-ce que la première question reste vraie pour un nombre infini de points ?

Convexes

Exercice 5 (Convexes euclidiens)

Soient \mathcal{C} un convexe fermé non vide d'un espace euclidien et $P \notin \mathcal{C}$ un point de cet espace.

- a) Montrer qu'il existe un unique point $Q \in \mathcal{C}$ tel que $d(P, Q) = d(P, \mathcal{C})$.
On dit que Q est la projection de P sur \mathcal{C} .
- b) Montrer que l'hyperplan \mathcal{H} passant par Q et orthogonal à \overrightarrow{QP} est un *plan de support*, c'est-à-dire que \mathcal{H} rencontre \mathcal{C} , mais pas son intérieur.
- c) Montrer que tout convexe fermé peut s'écrire comme l'intersection de demi-espaces affines.
- d) Est-ce que la question précédente reste vraie si on se place dans un espace affine de dimension finie, plutôt que dans un espace euclidien ?

Exercice 6 (Séparation de convexes)

Étant donnés deux convexes compacts non vides disjoints dans un espace affine de dimension finie, montrer qu'il existe un hyperplan qui les sépare strictement (c'est-à-dire qu'il ne les rencontre pas et que les deux convexes ne sont pas dans le même demi-espace délimité par cet hyperplan).

Isométries

Exercice 7 (Isométries du triangle)

- a) Déterminer le groupe des isométries d'un triangle dans le plan¹, la discussion sera menée en fonction des propriétés métriques du triangle.
- b) Même question avec un quadrilatère.

Exercice 8 (Isométries du tétraèdre)

Montrer que le groupe des isométries affines qui préserve un tétraèdre régulier est isomorphe à \mathfrak{S}_4 , le groupe de permutations de 4 points.

Exercice 9 (Étude d'isométries du plan)

On considère le plan \mathbb{R}^2 muni de sa structure euclidienne standard. Soient les applications suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (x + 3y + 1, -3x + y) & f_2(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y + 1, 2x + y - 1) \\ f_3(x, y) &= \frac{1}{5}(3x + 4y - 1, 4x - 3y + 2) & f_4(x, y) &= (x + 3, y) \\ f_5(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + \sqrt{2}, -x - y - 2 + \sqrt{2}) & f_6(x, y) &= (\sqrt{x^2 + y^2}, x + y) \end{aligned}$$

- a) Lesquelles de ces applications sont des isométries ?
- b) Lesquelles des isométries sont directes ?
- c) Pour chacune des isométries déterminer sa nature et ses paramètres ?
- d) Décomposer ces isométries en produit de réflexions ?

Exercice 10 (Étude d'isométries de l'espace)

- a) Soient R et T une rotation et une translation de \mathbb{R}^3 . Quelle est la nature de $T \circ R$?
- b) Soit l'isométrie de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Décrire la nature et les paramètres de cette isométrie.
- c) On considère la même matrice R . Décrire la nature et les paramètres de l'isométrie affine $X \mapsto RX + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- d) Soit l'isométrie de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Décrire la nature et les paramètres de cette isométrie.
- e) Quelle est la composée de trois symétries de plans parallèles de \mathbb{R}^3 ?

1. Il s'agit des isométries qui préservent l'ensemble des sommets du triangle.

Exercice 11 (Capes 2007, 2^e épreuve)

Partie V. GROUPES DIÉDRAUX

1. Soit E un plan affine euclidien orienté. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. On appelle groupe diédral d'ordre $2p$, noté D_{2p} , le groupe des isométries laissant invariant un polygone régulier

$$\mathcal{P}_p = \{M_0, \dots, M_{p-1}\}$$

à p sommets, parcourus dans le sens direct. On pose $M_p = M_0$.

- a) Montrer que le sous-groupe C_p de D_p constitué des isométries directes est un groupe cyclique d'ordre p engendré par la rotation ρ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{p}$, où O est le centre du polygone \mathcal{P}_p .
- b) Préciser une symétrie orthogonale σ laissant le polygone \mathcal{P}_p invariant.
- c) Montrer que

$$D_{2p} = \{\rho^i \circ \sigma^j; i \in \{1, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\}$$

et en déduire que D_{2p} est un groupe d'ordre $2p$.

- d) Soit $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Montrer que $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma = \rho^{p-k}$.

Géométrie projective sans le dire

Exercice 12 (points cocycliques et le théorème de Ptolémée)

On se donne 4 points distincts A, B, C et D du plan complexe d'affixes a, b, c et d respectivement.

- a) Montrer que l'on a toujours

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$$

avec égalité si et seulement si il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $(b-a)(d-c) = \lambda(d-a)(c-b)$.

- b) Déduire de la question précédente que le cas d'égalité est équivalent à

$$\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) - \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) = \pm\pi.$$

- c) Montrer le théorème de Ptolémée :

Un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle si et seulement si le produit des longueurs de ses diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

Exercice 13 (Birapports)

Soient 4 points du plan complexe avec affixes a, b, c, d distincts deux à deux. On définit leur birapport comme étant la quantité :

$$[a, b, c, d] = \frac{a - c}{b - c} \cdot \frac{b - d}{a - d} \in \mathbb{C}.$$

- a) Montrer que si 4 points sont alignés alors leur birapport est un nombre réel. Dans quel cas ce birapport est positif ?
- b) Montrer que si 4 points sont cocycliques alors leur birapport est un nombre réel. Dans quel cas ce birapport est positif ?
- c) Montrer que le birapport de 4 points est réel si et seulement si les 4 points sont alignés ou cocycliques.
- d) Prouver que si 4 points d'affixes non nulles sont alignés alors leurs images par $1/\bar{z}$ sont alignées ou cocycliques.
- e) Montrer que les homothéties de rapport non nul, les rotations et les translations préservent les birapports, et que les symétries les transforment en leurs conjugués.
- f) Montrer que les points d'affixes $-2 + 6i, 1 + 7i, 4 + 6i, 6 + 2i$ sont cocycliques.

Exercice 14 (Inversions)

Une inversion $i(\Omega, r)$ de centre Ω et de rapport $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une application du plan P privé de Ω dans P qui à tout point M associe le point M' tel que

- M' soit sur la droite ΩM ,
- $\overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M'} = r^2$.

- a) Déterminer l'image de $i(\Omega, r)$.
- b) Montrer que l'inversion est une involution.
- c) En identifiant le plan P avec \mathbb{C} , donner l'expression analytique de l'inversion $i(0, 1)$, puis, plus généralement, de $i(\omega, r)$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
- d) Montrer que chaque point du cercle de centre Ω et de rayon r est invariant par l'inversion.
- e) Montrer qu'une inversion transforme un birapport en son conjugué.
- f) Montrer que l'inversion préserve les droites qui passent par Ω .
- g) Montrer qu'elle envoie une droite qui ne passe pas par Ω sur un cercle qui passe par Ω .
- h) Montrer aussi qu'elle envoie tout cercle qui ne passe pas par Ω sur un cercle qui ne passe pas par Ω .

Exercice 15 (Homographies)

Une homographie est une application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec a, b, c, d complexes, tels que $ad - bc \neq 0$.

- Montrer que toute homographie est la composée de translations, d'homothéties et au plus d'une inversion et d'une réflexion.
- Montrer que toute homographie envoie droites ou cercles sur droites ou cercles.
- Montrer que les homographies forment un groupe.

Exercice 16

Deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont tangents intérieurement en O . On considère une famille de cercles deux à deux tangents entre eux et tangents à \mathcal{C} et \mathcal{C}' . Montrer que les points de contact de ces cercles entre eux sont situés sur un même cercle tangent en O aux deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

