
TD0 : GÉOMÉTRIE PLANE ET NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 (Droites)

a) On considère l'espace affine \mathbb{R}^2 . Soit \mathcal{D} la droite $\{(x, y) \mid x + 2y = 1\}$.

- (i) Déterminer toutes les équations cartésiennes qui définissent la même droite \mathcal{D} .
- (ii) Déterminer toutes les équations cartésiennes qui définissent une droite parallèle à \mathcal{D} .
- (iii) Déterminer la droite vectorielle $\vec{\mathcal{D}}$ parallèle à \mathcal{D} .
- (iv) Déterminer les équations cartésiennes qui définissent la droite parallèle à \mathcal{D} qui passe par $A = (2, 1)$.
- (v) Déterminer une équation de la droite qui passe par les points $C = (2, 3)$ et $D = (4, -3)$. Est-elle parallèle à \mathcal{D} ?

b) On considère le plan complexe \mathbb{C} .

- (i) Montrer que toute droite réelle de \mathbb{C} est définie par une équation complexe de la forme

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0\}$$

où $\beta \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

- (ii) Déterminer une équation complexe de la droite \mathcal{D} de la question (a).
- (iii) Donner une condition sur les coefficients des équations complexes pour que deux droites soient parallèles.

Exercice 2 (Conditions géométriques)

a) Étant donnés deux points distincts A et B du plan complexe d'affixes a et b , donner une condition sur $a\bar{b}$ pour que la droite AB passe par O d'affixe 0. Préciser quand O est entre A et B , et quand il ne l'est pas.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les affixes a, b, c de trois points A, B, C du plan complexe pour que le triangle ABC soit équilatéral.

Exercice 3 (Équation d'un cercle)

Montrer que tout cercle du plan complexe est défini par une équation de la forme

$$z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + c = 0,$$

où a est un nombre complexe et c un réel vérifiant $c \leq |a|^2$. Montrer que réciproquement toute équation de ce type est celle d'un cercle.

Exercice 4 (Encore des équations)

a) Discuter selon les valeurs de $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ quel est le sous-ensemble de \mathbb{C} défini par l'équation

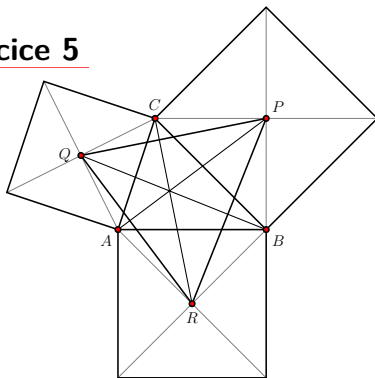
$$\alpha.z\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + \gamma = 0.$$

b) Soit λ un nombre réel positif, décrire géométriquement l'ensemble

$$E_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \lambda|z - b|\}.$$

c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes tels que $|z - 1| = |z - iz| = |z - i|$.

Exercice 5



À l'extérieur d'un triangle ABC , on construit trois carrés de bases les côtés et de centres P , Q et R . Montrer que les segments AP et QR (resp. BQ et RP , CR et PQ) sont orthogonaux et de même longueur. En déduire que les droites AP , BQ et CR sont concourantes.

Exercice 6

On construit à l'extérieur d'un parallélogramme $ABCD$ quatre carrés de bases les côtés et de centres M , N , P et Q . Montrer que $MNPQ$ est un carré.

