Licence 3ème année, parcours Mathématiques — 2016-2017

M53, Géométrie affine et euclidienne

Solutions du rattrapage

7 juin 2017

[durée : 3 heures]

Exercice 1 (Barycentres)

Soient $\mathcal{E}$ un plan affine réel, et $\mathcal{R} = (A, B, C)$ un repère affine. On désigne par $(\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{R}}$ le point dont les coordonnées barycentriques[1] sont (α, β, γ) dans ce repère.

a) Déterminer la nature et les paramètres de l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(1, \beta, -\beta)_{\mathcal{R}} \mid \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Le représenter sur un dessin.

b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un triplet de nombres. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi_{a,b,c} : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{R}} & \longmapsto & a\alpha + b\beta + c\gamma \end{array}.$$

(i) Montrer que $\phi_{a,b,c}$ est une application affine.

(ii) Montrer que $\phi_{a,b,c}$ est constante si et seulement si $(a, b, c) \in \Delta$, où $\Delta = \{(\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est la droite vectorielle « diagonale » de $\mathbb{R}^3$.

(iii) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_{a,b,c} = \{(\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{R}} \mid a\alpha + b\beta + c\gamma = 0\}$ est une droite si et seulement si $(a, b, c) \notin \Delta$. Que peut-on dire de $\mathcal{D}_{a,b,c}$ dans le cas où $(a, b, c) \in \Delta$?

c) Soient M_1, M_2 et M_3 trois points de $\mathcal{E}$. Notons $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ les coordonnées barycentriques de M_i, pour $i = 1, 2, 3$, dans le repère $\mathcal{R} = (A, B, C)$.

(i) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ dans la base $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ de $\vec{\mathcal{E}}$.

(ii) Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$.

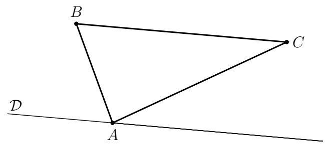
(iii) En déduire que si $M_1 \neq M_2$, la droite $\langle M_1, M_2 \rangle$ est définie dans le repère $\mathcal{R}$ par une équation de la forme $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Delta$.

d) Trouver un triplet (a, b, c) tel que $\mathcal{D}_{a,b,c}$ soit la médiane du triangle ABC issue de A.

---

1. On rappelle que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Solution :



a) D'après la définition de $\mathcal{D}$, nous avons les équivalences $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}, M = A + \beta B - \beta C = A + \beta\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow M \in A + \langle\overrightarrow{CB}\rangle$. Donc $\mathcal{D}$ est la droite passant par A de direction $\langle\overrightarrow{CB}\rangle$ [2].

b) (i) On peut directement vérifier que $\phi_{a,b,c}$ est stable par barycentre, mais on peut également observer que $\phi_{a,b,c}$ est la composée du morphisme affine $(a,b,c)_{\mathcal{R}} \mapsto (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et de l'application linéaire $(a,b,c) \mapsto a\alpha + b\beta + c\gamma$. Donc $\phi_{a,b,c}$ est affine comme la composée de deux applications affines.

(ii) Si $(a,b,c) = \lambda(1,1,1)$ alors $\phi_{a,b,c}\big((\alpha,\beta,\gamma)_{\mathcal{R}}\big) = \lambda(\alpha+\beta+\gamma) = \lambda$ est constante. Si $(a,b,c) \notin \Delta$ alors comme $a = \phi_{a,b,c}(A)$, $b = \phi_{a,b,c}(B)$ et $c = \phi_{a,b,c}(C)$ sont trois valeurs de $\operatorname{Im}\phi_{a,b,c}$ non toutes égales, alors $\phi_{a,b,c}$ est non constante. Observons que dans ce cas comme $\operatorname{Im}\phi_{a,b,c}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, alors $\operatorname{Im}\phi_{a,b,c} = \mathbb{R}$ et donc $\phi_{a,b,c}$ est surjective.

(iii) Comme $\mathcal{D}_{a,b,c} = \phi_{a,b,c}^{-1}(0)$ il suffit d'appliquer le résultat général du cours qui nous dit que si $\mathcal{D}_{a,b,c}$ n'est pas vide, alors $\mathcal{D}_{a,b,c}$ est un espace affine de codimension égale à la codimension de $\{0\}$ dans $\operatorname{Im}\phi_{a,b,c}$. Ainsi d'après la question précédente, si $(a,b,c) \notin \Delta$ alors $\mathcal{D}_{a,b,c}$ est un espace affine de codimension 1, donc une droite, et si $(a,b,c) \in \Delta$ alors $D_{a,b,c}$ est tout $\mathcal{E}$ ou vide en fonction de si $(a,b,c) = (0,0,0)$ ou si $(a,b,c) = (\lambda,\lambda,\lambda)$ avec $\lambda \neq 0$.

c) (i) Comme $M_i = (1-\beta_i-\gamma_i)A + \beta_i B + \gamma_i C$, alors $\overrightarrow{AM_i} = \beta_i\overrightarrow{AB} + \gamma_i\overrightarrow{AC}$ et donc par la relation de Chasles $\overrightarrow{M_1M_2} = (\beta_2-\beta_1)\overrightarrow{AB} + (\gamma_2-\gamma_1)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{M_1M_3} = (\beta_3-\beta_1)\overrightarrow{AB} + (\gamma_3-\gamma_1)\overrightarrow{AC}$.

(ii) Les trois points M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si les deux vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ sont colinéaires, et donc d'après la question précédente si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \beta_2-\beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 \\ \beta_3-\beta_1 & \gamma_3-\gamma_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour conclure il suffit de démontrer que ce déterminant est égal à celui de l'énoncé. Par des opérations sur les colonnes, en utilisant que $\alpha_i+\beta_i+\gamma_i = 1$, et des opérations sur les lignes, on trouve que

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2-\beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 \\ 0 & \beta_3-\beta_1 & \gamma_3-\gamma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_2-\beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 \\ \beta_3-\beta_1 & \gamma_3-\gamma_1 \end{vmatrix}.$$

(iii) Si $M_1 \neq M_2$ alors $M \in \langle M_1, M_2\rangle$ si et seulement si M_1, M_2 et M sont alignés. D'après la question précédente, ceci est équivalent à $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$, où $(\alpha,\beta,\gamma)_{\mathcal{R}} = M$. En

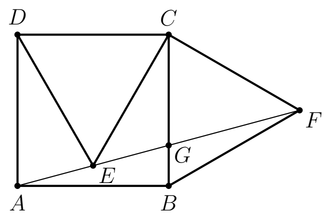
2. Le vecteurs $\overrightarrow{CB}$ est non nul car C et B sont des points du repère $\mathcal{R}$.

développant le déterminant selon la dernière ligne de la matrice, on trouve que cette équation s'écrit sous la forme $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ avec $a = \left|\begin{smallmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{smallmatrix}\right|$, $b = -\left|\begin{smallmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{smallmatrix}\right|$ et $c = \left|\begin{smallmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{smallmatrix}\right|$. Pour conclure $(a, b, c) \notin \Delta$ car sinon $\langle M_1, M_2 \rangle$ ne serait pas une droite, d'après la question b).

d) La médiane sortant de A est la droite engendrée par $A = (1, 0, 0)_{\mathcal{R}}$ et le milieu $\frac{1}{2}(B+C) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\mathcal{R}}$ de $[BC]$. Ainsi d'après la question précédente, on trouve que l'équation de cette droite est $\{-\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 0\} \Leftrightarrow \{\beta - \gamma = 0\}$.

Exercice 2 (Géométrie du plan complexe)

Soit $ABCD$ le rectangle du plan complexe dont les sommets A,B et D ont pour affixes respectives 0,1 et i. On considère le triangle équilatéral BFC construit à l'extérieur du rectangle $ABCD$, ainsi que le triangle équilatéral DEC construit à l'intérieur du rectangle $ABCD$.



a) Déterminer les affixes des points E et F.

b) Montrer que A, E et F sont alignés.

c) Déterminer l'affixe du point G qui est l'intersection des segments $[BC]$ et $[EF]$.

d) Donner l'expression analytique de l'homothétie de centre G qui envoie A sur F.

Solution :

a) Comme E est obtenu à partir de C par rotation de $-\frac{\pi}{3}$ autour de D, nous avons $E = D + R_{-\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{DC})$ et donc l'affixe de E est $z_E = i + e^{-\frac{\pi}{3}}1 = \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$. Et comme $F = B + R_{-\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{BC})$ l'affixe de F est $z_F = 1 + e^{-\frac{\pi}{3}}i = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

b) Comme $(2 + \sqrt{3})\left(\frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ nous observons que l'affixe de $\overrightarrow{AF}$ (qui est la même que celle de F car l'affixe de A est 0) est un multiple réel $(2 + \sqrt{3})$ de l'affixe de $\overrightarrow{AE}$ (identique à celle de E). Et donc les deux vecteurs sont colinéaires, et par conséquent les trois points A, E et F sont alignés.

c) La partie réelle de l'affixe de G est 1 (car identique à celle de B). Et comme les trois points A, E et G sont alignés, l'affixe de G est un multiple réel de l'affixe de E (dont la partie réelle est $\frac{1}{2}$). En comparant les parties réelles, on constate que le multiplicateur est 2 et donc que l'affixe recherchée de G est $z_G = 2z_E = 1 + (2 - \sqrt{3})i$.

d) L'expression analytique d'une homothétie de centre z_G est de la forme $z \mapsto z_G + \lambda(z - z_G)$. Donc il suffit qu'on détermine le réel λ, et pour cela il suffit de savoir que l'image de l'affixe 0 de A est z_F. Ainsi $\lambda = \frac{z_G - z_F}{z_G} = \frac{2z_E - (2+\sqrt{3})z_E}{2z_E} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc l'expression analytique est $z \mapsto -\frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

Exercice 3 (Isométries dans $\mathbb{R}^3$)

On se place dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$.

a) On considère les deux matrices

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{9}\begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Laquelle de ces deux matrices est la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^3$?

Pour la suite de l'exercice, on note M cette matrice de $O(\mathbb{R}^3)$, ainsi que l'application linéaire qu'elle définit.

b) Décrire M en détail (nature, paramètres).

c) Soit $T_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v} = (1, 1, 0)$. Quelle est la nature de l'application composée $T_{\vec{v}}M$?

d) Soit S la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $\{2x - 2y + z = 1\}$. Quels sont la nature et les paramètres de l'application composée MS ?

Solution :

a) Les vecteurs colonnes des deux matrices forment une base orthogonale, mais seulement ceux de la première forment une b.o.n. (ceux de la deuxième sont de norme 2). Donc la matrice orthogonale M est la première matrice [3].

b) Comme $\det(M) = 1$, M est une rotation. Pour trouver l'axe de rotation on cherche l'ensemble des vecteurs fixes : $\mathrm{Ker}(M - I)$, et on trouve $E_1 = \langle (2, -2, 1) \rangle$. Soit θ l'angle de rotation. Comme $2\cos(\theta) + 1 = \mathrm{tr}(M) = -1$ on trouve que $\theta = \pi$. Ainsi M est une rotation d'angle π autour de l'axe $\langle (2, -2, 1) \rangle$, autrement dit c'est une symétrie [4] axiale d'axe $\langle (2, -2, 1) \rangle$.

c) Comme $\vec{v} \perp (2, -2, 1)$, d'après le cours, $T_{\vec{v}}M$ est aussi une symétrie axiale.

d) Comme le plan $\{2x - 2y + z = 1\}$ est perpendiculaire à $\langle (2, -2, 1) \rangle$, la composé MS est une symétrie centrale de centre $\{2x - 2y + z = 1\} \cap \langle (2, -2, 1) \rangle = (\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9})$. En réalité dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$ nous avons les parties linéaires qui sont $\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et donc $\overrightarrow{MS} = -\mathrm{Id}$.

3. On peut vérifier par exemple que $M^t M = \mathrm{Id}$.
4. Comme M est symétrique on aurait pu conclure directement que M est une symétrie.

Exercice 4 (Coniques)

On considère l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y - 1)^2 + 2(x - y)^2 = 4\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse.

b) Déterminer les coordonnées du centre de $\mathcal{E}$, ainsi que les rayons.

c) Déterminer les axes de symétrie de $\mathcal{E}$ et donner les expressions analytiques des symétries par rapport à ces axes.

d) Déterminer les coordonnées des foyers de $\mathcal{E}$.

Solution :

a) On pose $X = \frac{x+y-1}{\sqrt{2}}$ et $Y = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$. Comme la partie linéaire $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ de ce changement de variables est orthogonale, alors l'équation de $\mathcal{E}$ dans la nouveau repère orthonormé $\mathcal{R}'$ est $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} = 1$. Ainsi d'après le cours, $\mathcal{E}$ est une ellipse de rayons $R = \sqrt{2}$ et $r = 1$.

b) Les rayons ont été déjà déterminés dans la question précédente. Le centre de l'ellipse a pour coordonnées $X = 0$ et $Y = 0$ dans le nouveau repère $\mathcal{R}'$, donc il s'agit du point de coordonnées $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

c) Les axes de symétrie ont pour équations dans la nouvelle base $X = 0$ et $Y = 0$, donc il s'agit des droites d'équations $x + y - 1 = 0$ et $x - y = 0$. Les expressions analytiques dans la nouvelle base des deux symétries sont respectivement $(X, Y)_{\mathcal{R}'} \mapsto (-X, Y)_{\mathcal{R}'}$ et $(X, Y)_{\mathcal{R}'} \mapsto (X, -Y)_{\mathcal{R}'}$. Ainsi la symétrie par rapport à la droite $\{x + y - 1\}$ est $(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 1, x - y)_{\mathcal{R}'} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - x - y, x - y)_{\mathcal{R}'} = (1 - y, 1 - x)$. De même, on trouve que la symétrie par rapport à la droite $\{x - y = 0\}$ est $(x, y) \mapsto (y, x)$.

d) Les foyers se trouvent sur le grand axe $\{x - y = 0\}$ à distance $\sqrt{R^2 - r^2} = 1$ du centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Comme un vecteur directeur du grand axe est $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, nous pouvons conclure que les coordonnées des deux foyers sont

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \pm (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}).$$