Licence 3ème année, parcours Mathématiques — 2016-2017

M53, Géométrie affine et euclidienne

Solutions de l'examen final

4 janvier 2017

[durée : 3 heures]

Exercice 1 (Coniques)

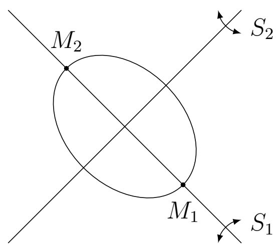
On se place dans $\mathbb{R}^2$ avec la structure euclidienne standard, dont la distance est notée d. On considère une ellipse $\mathcal{E}$ qui n'est pas un cercle.

a) Montrer qu'il existe une unique paire de points $\{M_1, M_2\}$ tel que

$$\mathrm{d}(M_1, M_2) = \max_{A,B\in\mathcal{E}} \mathrm{d}(A, B).$$

b) Soit Id l'identité de $\mathbb{R}^2$, S_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\langle M_1, M_2\rangle$ et S_2 la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de $[M_1, M_2]$. En déduire que l'ensemble des isométries affines qui préservent $\mathcal{E}$, c'est-à-dire les $\phi \in \mathrm{Iso}\,\mathbb{R}^2$ telles que $\phi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, est

$$\{\mathrm{Id},\ S_1,\ S_2,\ S_1S_2\}.$$



c) Préciser la nature et les paramètres de S_1S_2.

Pour la suite de l'exercice on considère l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4(x + y - 4)^2 + (x - y)^2 = 16\}.$$

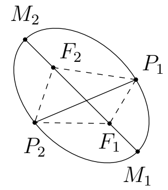
d) Montrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse.
Indication : Au vu de la forme de l'équation, on peut envisager un changement de variables de la forme $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 4)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$. Le cas échéant, il faut justifier son utilisation.

e) Déterminer les coordonnées cartésiennes dans le repère canonique des deux points M_1 et M_2 définis dans la question (a).

f) Écrire les expressions analytiques dans le repère canonique des deux symétries S_1 et S_2 définies dans la question (b).

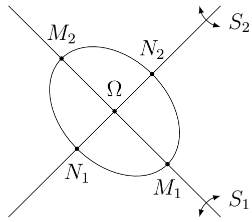
Solution :

a) D'après le cours, comme $\mathcal{E}$ n'est pas un cercle, il existe deux points (les foyers) F_1 et F_2 et une constante $a > d(F_1, F_2)/2$ tels que $\mathcal{E} = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(F_1, M) + d(M, F_2) = 2a\}$. Soient M_1 et M_2 les deux points de E situés sur l'axe focal, c'est à dire alignés avec F_2 et F_2.



Soient P_1 et P_2 deux points de $\mathcal{E}$, alors pour $i = 1, 2$ on a $d(P_1, P_2) \leq d(P_1, F_i) + d(F_i, P_2)$ avec égalité si et seulement si P_1, P_2 et F_i sont alignés. En sommant ces deux inégalités on trouve $d(P_1, P_2) \leq 4a$ avec égalité si et seulement si P_1, P_2, F_1 et F_2 sont alignés, autrement dit si et seulement si $\{P_1, P_2\} = \{M_1, M_2\}$.

b) D'après la question précédente toute isométrie ϕ qui préserve $\mathcal{E}$ préserve $\{M_1, M_2\}$. Ainsi elle admet un point fixe $\Omega = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2$ et préserve la médiatrice de $[M_1, M_2]$ comme le lieu des points équidistants de M_1 et M_2. Notons $[N_1, N_2]$ les deux points d'intersection de la médiatrice avec $\mathcal{E}$, qui forment également un couple de points préservé par ϕ, comme intersection de deux ensembles préservés par ϕ.



Comme Ω, M_1 et N_1 ne sont pas alignés, ils forment un repère affine de $\mathbb{R}^2$. Ainsi ϕ est complètement déterminée par l'image de ce repère.

D'après ce qu'on a vu $\phi(\Omega) = \Omega$, $\phi(M_1) \in \{M_1, M_2\}$ et $\phi(N_1) \in \{N_1, N_2\}$. Ainsi il ne peut y avoir qu'au plus 4 isométries qui préservent $\mathcal{E}$. Maintenant il est facile de voir que les 4 isométries de l'énoncé conviennent :

$$\mathrm{Id}(M_1) = M_1, \quad \mathrm{Id}(N_1) = N_1, \qquad S_1(M_1) = M_1, \quad S_1(N_1) = N_2,$$
$$S_2(M_1) = M_2, \quad S_2(N_1) = N_1, \qquad S_1S_2(M_1) = M_2, \quad S_1S_2(N_1) = N_2.$$

c) Comme les axes des deux symétries S_1 et S_2 sont orthogonaux, leur composée est une rotation de $2 \times \pm\dfrac{\pi}{2} = \pm\pi$, autour de leur intersection Ω. Autrement dit S_1S_2 est une symétrie centrale de centre Ω.

d) Comme l'application $(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 4), \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)\right)$ est une isométrie affine de partie linéaire la réflexion ayant pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, alors le changement de coordonnées proposé dans l'indication correspond à un autre repère cartésien orthonormé $\mathcal{R}$ dans lequel l'équation de $\mathcal{E}$ devient

$$\mathcal{E} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{Y}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1\},$$

qui est, d'après le cours, l'équation d'une ellipse de rayons $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$.

e) D'après la question précédente le grand axe de $\mathcal{E}$ est l'axe des Y, et donc les points M_1 et M_2 ont pour coordonnées $(0, 2\sqrt{2})_{\mathcal{R}}$ et $(0, -2\sqrt{2})_{\mathcal{R}}$ dans le repère $\mathcal{R}$. Ainsi en appliquant le changement de coordonnées inverse, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)+2$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)+2$, on trouve les coordonnées dans la base canonique $(4,0)$ et $(0,4)$.

f) L'expression de S_1 dans le repère $\mathcal{R}$ est $S_1(X,Y)_{\mathcal{R}} = (-X,Y)_{\mathcal{R}}$. Ainsi en appliquant les changements de repère on trouve $S_1(x,y) = S_1\big(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-4), \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\big)_{\mathcal{R}} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-4), \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y))_{\mathcal{R}} = (4-y, 4-x)$. De même on trouve $S_2(x,y) = (y,x)$.

Exercice 2 (Groupe d'isométries)

On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ à quatre points A, B, C et D de $\mathbb{R}^3$:

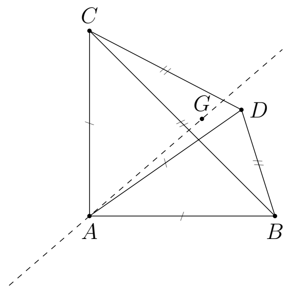
$$\mathcal{T} = \big\{A(1,0,0),\ B(2,0,0),\ C(1,1,0),\ D(1,0,1)\big\}.$$

Décrire, en précisant leurs paramètres, les rotations qui préservent $\mathcal{T}$, c'est-à-dire les rotations R telles que $R(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

Indication : Dessiner l'ensemble $\mathcal{T}$. Montrer qu'un des points de $\mathcal{T}$, à préciser, doit être fixe par ces rotations.

Solution :

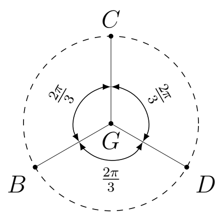
Nous avons



$$d(A,B) = d(A,C) = d(A,D) = 1,$$
$$d(B,C) = d(C,D) = d(D,B) = \sqrt{2}.$$

Ainsi toute isométrie qui préserve les 4 points doit envoyer A en A car c'est le seul point dont les distances aux autres points sont toutes égales à 1.

Et comme cette isométrie doit permuter B, C et D elle préserve leur isobarycentre $G(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Ainsi toute rotation qui préserve les 4 points doit avoir comme axe la droite $\langle A, G\rangle$ qui est orthogonale au plan $\langle B, C, D\rangle$, comme hauteur dans un tétraèdre isocèle à base équilatérale. Et sa restriction au plan $\langle B, C, D\rangle$ est une rotation qui permuter les sommets du triangle équilatéral BCD, donc doit être d'angle 0, $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$.



Et réciproquement toute rotation d'axe $\langle A, G\rangle$ et dont la restriction à $\langle B, C, D\rangle$ est une rotation de 0, $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$ autour de G convient clairement car elle permute B, C, D et préserve A.

Exercice 3 (Espaces affines)

On considère le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 qui vérifient l'équation

$$\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

a) Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. Préciser un point de $\mathcal{P}$, ainsi que sa direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

b) Donner un repère cartésien et un repère affine de $\mathcal{P}$.

Solution :

a) Comme l'intégrale $Q \mapsto \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_2[X]$, notons la I, $\mathcal{P} = I^{-1}(1)$ est un sous espace affine de $\mathbb{R}_2[X]$, car $1 \in \operatorname{Im}(I)$, de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}} = I^{-1}(0)$, les polynômes à intégrale 0. Nous avons $\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$, donc le polynôme constant 1 est un élément de $\mathcal{P}$.

b) Soit $Q(X) = aX^2 + bX + c$, alors $\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$, et donc $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \{aX^2 + bX + c \mid \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0\} = \langle 3X^2 - 1, 2X - 1\rangle$. Ainsi un repère cartésien de $\mathcal{P}$ est $(1, 3X^2 - 1, 2X - 1)$, et un repère affine est $(1, 3X^2, 2X)$.

Exercice 4 (Géométrie dans le plan complexe)

On se place dans le plan complexe.

a) Indiquer sur un dessin la position des points dont les affixes sont les racines de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

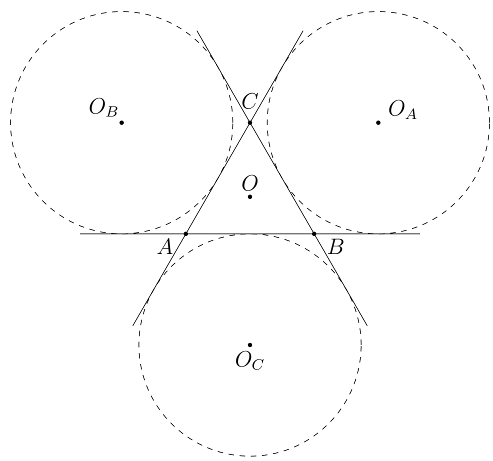
b) Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si

$$a\mu^2 + b\mu + c = 0 \qquad (\triangle)$$

pour μ une des racines de $z^2 + z + 1 = 0$.

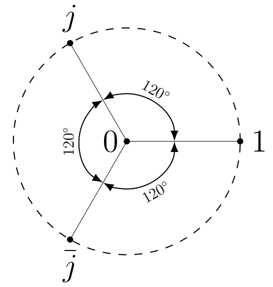
c) Soit $a = -2i$ l'affixe de A et $b = 1 + i$ l'affixe de B. Déterminer les affixes c des points C tels que le triangle ABC soit équilatéral.

d) Soit ABC un triangle équilatéral tel que l'affixe de son centre soit 0 et l'affixe de C soit i. Déterminer les affixes des trois centres des cercles exinscrits de ABC et vérifier qu'elles vérifient l'équation $(\triangle)$.
Indication : Il y a une relation directe entre l'affixe d'un sommet du triangle et l'affixe du centre du cercle exinscrit opposé.



Solution :

a) Les deux racines de l'équation sont habituellement notées $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et nous avons $j^2 = \bar{j}$ et $\bar{j}^2 = j$.

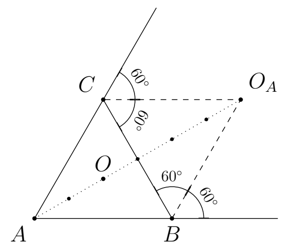


b) ABC est un triangle équilatéral si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est l'image par rotation de $\pm\frac{\pi}{3}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$, autrement dit si et seulement si $\overrightarrow{AC}$ est l'image par rotation de $\pm\frac{2\pi}{3}$ du vecteur $\overrightarrow{BA}$. En exprimant ceci en termes d'affixes, nous constatons que ABC est équilatéral si et seulement si $(c-a) = e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}(a-b) \Leftrightarrow a(-1-\mu) + b\mu + c = 0$ où $\mu = e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}$ est l'une des racines j ou $\bar{j}$. Pour finir il suffit de remarquer que $-1-\mu = \mu^2$.

c) D'après la question précédente les affixes de c possibles sont $c = -a\mu^2 - b\mu$ où μ est l'une des racines j ou $\bar{j}$. Ainsi $c = -(-2i)(-\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}) - (1+i)(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2})$.

d) Les affixes de A et B sont obtenues en multipliant par j et $\bar{j}$ l'affixe de C, car ces points sont l'image de C par rotation de $\pm\frac{2\pi}{3}$. Ainsi les trois affixes de A, B et C sont ji, $\bar{j}i$ et i.

Comme BO_A et CO_A sont des bissectrices des angles extérieurs, on trouve les mesures des angles $\widehat{CBO_A} = \widehat{BCO_A} = 60°$ et donc le triangle BCO_A est également équilatéral. Ainsi le centre O du triangle ABC est sur le segment AO_A et le coupe en rapport $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ (voir la figure). Et comme l'affixe de O est 0 on trouve que l'affixe de O_A est $(-2) \times$ (l'affixe de A). De même, les affixes de O_B et O_C sont obtenues en multipliant par (-2) les affixes de B et C respectivement. Ainsi les trois affixes sont $-2ji$, $-2\bar{j}i$ et $-2i$.



Pour finir, comme les affixes de ABC vérifient $(\triangle)$, en multipliant par (-2) l'équation, on trouve que les affixes de O_A, O_B et O_C vérifient aussi $(\triangle)$.