LICENCE $3^{\text{ÈME}}$ ANNÉE, PARCOURS MATHÉMATIQUES — 2016-2017

M53, GÉOMÉTRIE AFFINE ET EUCLIDIENNE

EXAMEN FINAL

4 janvier 2017

[durée : 3 heures]

⚠ **Documents autorisés :** *Une feuille A4 recto-verso écrite à la main.*

Exercice 1 (Coniques)

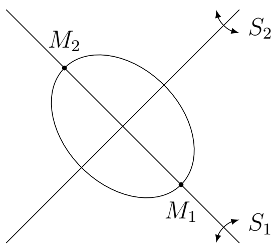
On se place dans $\mathbb{R}^2$ avec la structure euclidienne standard, dont la distance est notée d. On considère une ellipse $\mathcal{E}$ qui n'est pas un cercle.

a) Montrer qu'il existe une unique paire de points $\{M_1, M_2\}$ tel que

$$\mathrm{d}(M_1, M_2) = \max_{A,B\in\mathcal{E}} \mathrm{d}(A, B).$$

b) Soit Id l'identité de $\mathbb{R}^2$, S_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\langle M_1, M_2\rangle$ et S_2 la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de $[M_1, M_2]$. En déduire que l'ensemble des isométries affines qui préservent $\mathcal{E}$, c'est-à-dire les $\phi \in \operatorname{Iso}\mathbb{R}^2$ telles que $\phi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, est

$$\{\mathrm{Id},\ S_1,\ S_2,\ S_1S_2\}.$$



c) Préciser la nature et les paramètres de S_1S_2.

Pour la suite de l'exercice on considère l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4(x + y - 4)^2 + (x - y)^2 = 16\}.$$

d) Montrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse.
Indication : Au vu de la forme de l'équation, on peut envisager un changement de variables de la forme $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 4)$ *et* $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$. *Le cas échéant, il faut justifier son utilisation.*

e) Déterminer les coordonnées cartésiennes dans le repère canonique des deux points M_1 et M_2 définis dans la question (a).

f) Écrire les expressions analytiques dans le repère canonique des deux symétries S_1 et S_2 définies dans la question (b).

T.S.V.P.

Exercice 2 (Groupe d'isométries)

On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ à quatre points A, B, C et D de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{T} = \{A(1,0,0),\ B(2,0,0),\ C(1,1,0),\ D(1,0,1)\}.$$

Décrire, en précisant leurs paramètres, les rotations qui préservent $\mathcal{T}$, c'est-à-dire les rotations R telles que $R(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

Indication : Dessiner l'ensemble $\mathcal{T}$. Montrer qu'un des points de $\mathcal{T}$, à préciser, doit être fixe par ces rotations.

Exercice 3 (Espaces affines)

On considère le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 qui vérifient l'équation

$$\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

a) Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. Préciser un point de $\mathcal{P}$, ainsi que sa direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

b) Donner un repère cartésien et un repère affine de $\mathcal{P}$.

Exercice 4 (Géométrie dans le plan complexe)

On se place dans le plan complexe.

a) Indiquer sur un dessin la position des points dont les affixes sont les racines de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

b) Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si

$$a\mu^2 + b\mu + c = 0 \qquad (\triangle)$$

pour μ une des racines de $z^2 + z + 1 = 0$.

c) Soit $a = -2i$ l'affixe de A et $b = 1 + i$ l'affixe de B. Déterminer les affixes c des points C tels que le triangle ABC soit équilatéral.

d) Soit ABC un triangle équilatéral tel que l'affixe de son centre soit 0 et l'affixe de C soit i. Déterminer les affixes des trois centres des cercles exinscrits de ABC et vérifier qu'elles vérifient l'équation $(\triangle)$.
Indication : Il y a une relation directe entre l'affixe d'un sommet du triangle et l'affixe du centre du cercle exinscrit opposé.