INTERROGATION

25 octobre 2016

[durée : 2 heures]

Documents autorisés : *Une feuille A4 recto-verso écrite à la main.*

Exercice 1 (Transformations affines)

On note $h_{\Omega,\lambda}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport λ dans l'espace affine $\mathcal{E}$. Soit Ω_1 et Ω_2 deux points de $\mathcal{E}$ et λ_1 et λ_2 deux nombres réels tels que $\lambda_1\lambda_2 = 1$.

a) Montrer que la composée $T = h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une translation.

b) Exprimer le vecteur de translation $\overrightarrow{v}$ de T en fonction des Ω_1,Ω_2,λ_1 et λ_2.

c) Illustrer la composée T sur un dessin.

Exercice 2 (Sous-espaces affines)

a) (Question de cours) Démontrer le résultat suivant vu en cours :

> *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines, $\mathcal{H}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une application affine.*
> *Alors l'image $\phi(\mathcal{H})$ de $\mathcal{H}$ par ϕ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ de direction $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{H}})$, l'image de la direction $\overrightarrow{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ par la partie linéaire $\overrightarrow{\phi}$ de ϕ.*

b) Montrer que l'ensemble $\mathbb{U}_3$ des polynômes unitaires de degré 3 (c.-à-d. dont le terme de plus haut degré est X^3) est un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré au plus 3.

c) Donner un repère cartésien, puis un repère affine de $\mathbb{U}_3$.

d) On considère l'application $\delta : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto P'$ qui associe à un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ sa dérivé $\delta(P) = P' \in \mathbb{R}_2[X]$.
Montrer que l'image $\delta(\mathbb{U}_3)$ de $\mathbb{U}_3$ par δ est un sous-espace affine et déterminer sa direction.

e) Donner un repère cartésien, puis un repère affine de $\delta(\mathbb{U}_3)$.

T.S.V.P.

Exercice 3 (Géométrie dans la plan complexe)

On se place dans le plan complexe $\mathbb{C}$. On considère deux points A et B d'affixes respectives $2i$ et $1-i$.

a) Donner l'équation de la droite qui passe par A et B sous la forme

$$\overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0,$$

où β et γ sont des constantes à déterminer.

b) Donner, sous la même forme que dans la question précédente, l'équation de la droite orthogonale à AB qui passe par le milieu du segment AB.

c) Donner l'équation du cercle de diamètre AB sous la forme

$$z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + c = 0,$$

où a et c sont des constantes à déterminer.

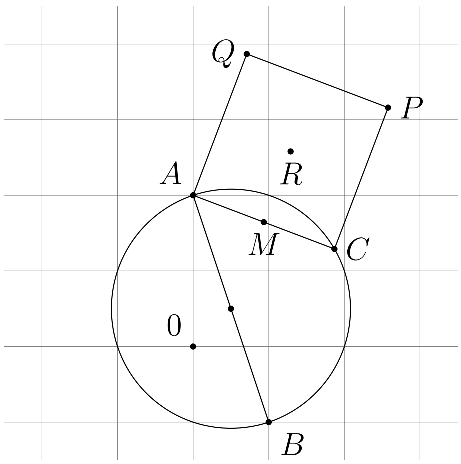
Pour la suite de l'exercice on considère un point C du cercle de diamètre AB. On note z l'affixe de C.

d) Écrire l'affixe de C sous la forme $z = o + \rho e^{i\theta}$ où o et ρ sont deux constantes à déterminer et θ est un paramètre réel.

e) Soit M le milieu du segment AC. Déterminer l'affixe de M en fonction de θ. Puis, montrer que M décrit un cercle $\mathcal{S}$, dont on précisera le centre et le rayon, quand C décrit le cercle de rayon AB.

f) On considère le rectangle[1] positivement orienté $ACPQ$ (voir le dessin). Soit R son centre. Déterminer l'affixe de R en fonction de θ. Puis, montrer que R décrit un cercle, dont on précisera le centre T et le rayon, quand C décrit le cercle de rayon AB.

g) Montrer que le centre T du cercle décrit par R se trouve sur le cercle $\mathcal{S}$ décrit par M.



1. C'est une erreur, il faut lire «carré» à la place de «rectangle».