Solutions de l'interrogation

22 novembre 2016

[durée : 1 heure]

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 muni du produit scalaire standard, c.-à-d. pour lequel la base canonique est une base orthonormée et tel que $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^tB)$. Soit

$$\mathcal{H} = \left\{M \in M_2(\mathbb{R}) \middle| \, \mathrm{tr}(M) = 1\right\}$$

l'ensemble des matrices à trace égale à 1.

a) On note Id la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\overrightarrow{\mathcal{H}} = \mathrm{Id}^\perp$, où $\overrightarrow{\mathcal{H}}$ est la direction de $\mathcal{H}$.

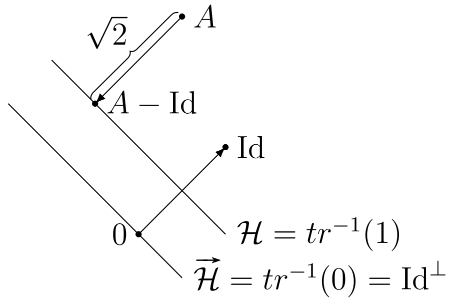
b) Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer la distance de A à $\mathcal{H}$.

Solution :

a) Comme $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^tB)$, nous avons $\mathrm{tr}(A) = \langle A|\mathrm{Id}\rangle$. Ainsi, comme la trace est linéaire, $\mathcal{H} = \mathrm{tr}^{-1}(1)$ est un espace affine de direction

$$\overrightarrow{\mathcal{H}} = \mathrm{tr}^{-1}(0) = \left\{M \in M_2(\mathbb{R}) \middle| \, \mathrm{tr}(M) = 0\right\} = \left\{M \in M_2(\mathbb{R}) \middle| \langle A|\mathrm{Id}\rangle = 0\right\} = \mathrm{Id}^\perp.$$

b) D'après la question précédente on cherche la projection de A sur $\mathcal{H}$ sous la forme $A+t\mathrm{Id} \in \mathcal{H}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Nous avons $\mathrm{tr}(A + t\mathrm{Id}) = 1 \Leftrightarrow 3 + 2t = 1 \Leftrightarrow t = -1$. Ainsi la projection de A sur $\mathcal{H}$ est $A - \mathrm{Id}$ et la distance de A à $\mathcal{H}$ est égale à $\mathrm{d}(A, A - \mathrm{Id}) = \|\mathrm{Id}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.



Exercice 2

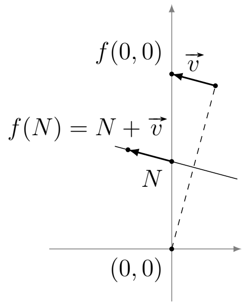
On considère $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ munis de la structure euclidienne standard. Pour chacune des applications suivantes, déterminer s'il s'agit d'une isométrie, et le cas échéant déterminer sa nature et ses paramètres.

a) $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1)$.

b) $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^3)$, $g(x,y,z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z, -y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z)$.

c) *[bonus]*
$h \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^3)$, $h = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$ où $T_{\vec{v}}$ est la translation du vecteur $\vec{v} = (1,1,1)$ et $S_{\mathcal{H}}$ est la réflexion par rapport au plan $\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1\}$.

Solution :



a) Nous avons $f(x,y) = A\binom{x}{y} + B$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \binom{0}{1}$. Comme les vecteurs colonnes de A forment une b.o.n et $\det A = -1$, alors f est une réflexion ou une réflexion glissée. Nous avons $f(0,0) = (0,1)$ donc $N = \frac{(0,0)+(0,1)}{2} = (0, \frac{1}{2})$ est un point de l'axe de symétrie. De plus $f(N) = (\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4} + 1) = N + \vec{v}$, où $\vec{v} = (\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2})$. Ainsi on trouve que f est une réflexion glissée de vecteur $\vec{v} = \frac{1}{4}(1, 2-\sqrt{3})$ et d'axe passant par $N = (0, \frac{1}{2})$ et de direction $\langle \vec{v} \rangle$.

b) L'application g est linéaire de la forme $g(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in O_3^-$ car les vecteurs colonnes de A forment une b.o.n. et $\det(A) = -1$. De plus comme $\operatorname{tr} A = -1 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}$ nous déduisons que g est une anti-rotation d'angle θ tel que $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}$. L'axe de cette rotation est formé par les (-1)-vecteurs propres et comme $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, nous obtenons que l'axe est engendré par $\vec{u} = (0,1,0)$ *(et donc le plan de réflexion est le plan d'équation $y = 0$)*. Il nous reste à déterminer le signe de l'angle de rotation en orientant l'axe selon $\vec{u}$. Soit $\vec{v} = (1,0,0)$ et $\vec{w} = g(\vec{v}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Comme $\det(u,v,w) = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ nous pouvons conclure que g est une anti-rotation d'axe vectoriel orienté par $(0,1,0)$ et d'angle de rotation $-\frac{\pi}{4}$ autour de cet axe orienté.

c) Nous avons $\vec{\mathcal{H}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\} = \vec{v}^{\perp}$. Donc d'après le cours h est une réflexion par rapport à un hyperplan (parallèle à $\mathcal{H}$) de la forme $M + \vec{\mathcal{H}}$ où M est un point fixe de h. Soit $P = (1,0,0) \in \mathcal{H}$, ainsi comme $h(P) = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{H}}(1,0,0) = T_{\vec{v}}(1,0,0) = (2,1,1)$ on trouve que $M = \frac{P+h(P)}{2} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ convient.
En conclusion h est la réflexion par rapport au plan $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = \frac{5}{2}\}$ (car $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$).
Remarque : Une autre rédaction est possible en utilisant que si $\vec{\mathcal{H}} \perp \vec{v}$ alors $S_{\mathcal{H}+\vec{v}/2} \circ S_{\mathcal{H}} = T_{\vec{v}} \Leftrightarrow T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{H}} = S_{\mathcal{H}+\vec{v}/2}$.