Interrogation

22 novembre 2016

[durée : 1 heure]

⚠ **Aucun document n'est autorisé.**

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 muni du produit scalaire standard, c.-à-d. pour lequel la base canonique est une base orthonormée et tel que $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^t B)$. Soit

$$\mathcal{H} = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) \middle| \, \mathrm{tr}(M) = 1 \right\}$$

l'ensemble des matrices à trace égale à 1.

a) On note Id la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\vec{\mathcal{H}} = \mathrm{Id}^\perp$, où $\vec{\mathcal{H}}$ est la direction de $\mathcal{H}$.

b) Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer la distance de A à $\mathcal{H}$.

Exercice 2

On considère $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ munis de la structure euclidienne standard. Pour chacune des applications suivantes, déterminer s'il s'agit d'une isométrie, et le cas échéant déterminer sa nature et ses paramètres.

a) $f \in \mathrm{Aff}\,(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1)$.

b) $g \in \mathrm{Aff}\,(\mathbb{R}^3)$, $g(x,y,z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z, -y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z)$.

c) *[bonus]*
$h \in \mathrm{Aff}\,(\mathbb{R}^3)$, $h = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$ où $T_{\vec{v}}$ est la translation du vecteur $\vec{v} = (1,1,1)$ et $S_{\mathcal{H}}$ est la réflexion par rapport au plan $\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1\}$.