TD3 : Nombres complexes et géométrie

Géométrie élémentaire

Exercice 1 (Conditions géométriques)

a) Étant donnés deux points A et B du plan complexe d'affixes a et b, donner une condition sur $a\bar{b}$ pour que la droite AB passe par O d'affixe 0. Préciser quand O est entre A et B, et quand il ne l'est pas.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les affixes a, b, c de trois points A, B, C du plan complexe pour que le triangle ABC soit équilatéral.

Exercice 2 (Bac C – 1991)

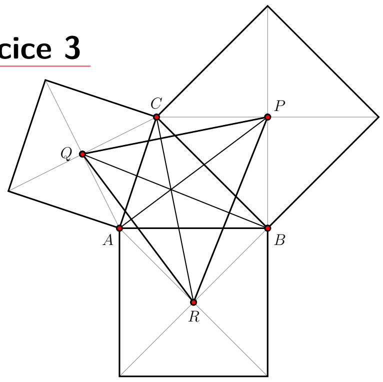
Le plan complexe P est identifié avec $\mathbb{C}$. Soit f l'application de P vers P définie par

$$f(z) = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4} z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

a) Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de f.

b) Montrer que le triangle $\Omega M f(M)$ est rectangle, en supposant que Ω est un point fixe de f.

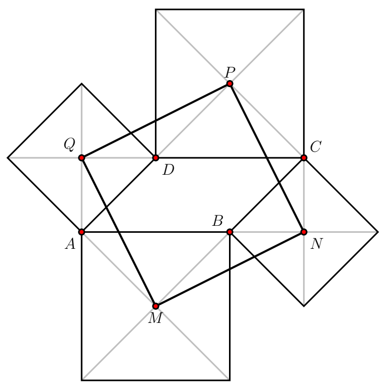
Exercice 3



À l'extérieur d'un triangle ABC, on construit trois carrés de bases les côtés et de centres P, Q et R. Montrer que les segments AP et QR (resp. BQ et RP, CR et PQ) sont orthogonaux et de même longueur. En déduire que les droites AP, BQ et CR sont concourantes.

Exercice 4

On construit à l'extérieur d'un parallélogramme $ABCD$ quatre carrés de bases les côtés et de centres M, N, P et Q. Montrer que $MNPQ$ est un carré.



Équations

Exercice 5 (Polygone des milieux)

Reprendre l'exercice 9.c) de la feuille de td n°1 en traduisant le problème en un système de n équations linéaires à n inconnues dans $\mathbb{C}$. Discuter le rang de ce système selon la parité de n.

Exercice 6 (Équation d'une droite)

On se place dans $\mathbb{C}$ que l'on considère comme un plan affine réel. On se propose de retrouver la formule d'une droite affine

$$\overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0, \qquad \text{avec } \beta \in \mathbb{C} \text{ et } \gamma \in \mathbb{R}. \tag{$\dagger$}$$

en donnant une équation complexe de la droite $\mathcal{D}$ passant par deux points A et B.

a) Montrer que si M est aligné avec A et B alors $(z-a)(\overline{z}-\overline{b})$ est réel, où z est l'affixe de M, a celle de A et b celle de B.

b) Montrer que $(z-a)(\overline{z}-\overline{b})$ est réel est équivalent à z satisfait

$$(z-a)(\overline{z}-\overline{b}) = (\overline{z}-\overline{a})(z-b),$$

puis en posant $\beta = i(a-b)$ en déduire que c'est équivalent à z satisfait ($\dagger$) pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$ à preciser.

Exercice 7 (Équation d'un cercle)

Montrer que tout cercle du plan complexe est défini par une équation de la forme

$$z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + c = 0,$$

où a est un nombre complexe et c un réel vérifiant $c \leq |a|^2$. Montrer que réciproquement toute équation de ce type est celle d'un cercle.

Exercice 8 (Encore des équations)

a) Discuter selon les valeurs de $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ quel est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par l'équation

$$\alpha.z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0.$$

b) Soit λ un nombre réel positif, décrire géométriquement l'ensemble

$$E_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \lambda|z-b|\}.$$

c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes tels que $|z-1| = |z-iz| = |z-i|$.

Géométrie projective sans le dire

Exercice 9 (points cocycliques et le théorème de Ptolémée)

On se donne 4 points distincts A, B, C et D d'affixes a, b, c et d respectivement.

a) Montrer que l'on a toujours

$$|AC|.|BD| \leq |AB|.|CD| + |AD|.|BC|$$

avec égalité si et seulement s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $(b-a)(d-c) = \lambda(d-a)(c-b)$.

b) Déduire de la question précédente que le cas d'égalité est équivalent à

$$\arg(\frac{b-a}{d-a}) - \arg(\frac{b-c}{d-c}) = \pm\pi.$$

c) Montrer le théorème de Ptolémée :

Un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle si et seulement si le produit des longueurs de ses diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

Exercice 10 (Birapports)

Soient 4 points du plan distincts deux à deux avec affixes a, b, c, d. On définit leur birapport comme étant la quantité :

$$[a,b,c,d] = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{C}.$$

a) Montrer que si 4 points sont alignés alors leur birapport est un nombre réel. Dans quel cas ce birapport est positif ?

b) Montrer que si 4 points sont cocycliques alors leur birapport est un nombre réel. Dans quel cas ce birapport est positif ?

c) Montrer que le birapport de 4 points est réel si et seulement si les 4 points sont alignés ou cocycliques.

d) Prouver que si 4 points d'affixes non nulles sont alignés alors leurs images par $1/\overline{z}$ sont alignées ou cocycliques.

e) Montrer que les homothéties de rapport non nul, les rotations et les translations préservent les birapports, et que les symétries les transforment en leurs conjugués.

f) Montrer que les points d'affixes $-2+6i$, $1+7i$, $4+6i$, $6+2i$ sont cocycliques.

Exercice 11 (Inversions)

Une inversion $i(\Omega, r)$ de centre Ω et de rapport $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une application du plan P privé de Ω dans P qui à tout point M associe le point M' tel que

— M' soit sur la droite ΩM,
— $\overline{\Omega M}.\overline{\Omega M'} = r^2$.

a) Déterminer l'image de $i(\Omega, r)$.

b) Montrer que l'inversion est une involution.

c) En identifiant le plan P avec $\mathbb{C}$, donner l'expression analytique de l'inversion $i(0, 1)$, puis, plus généralement, de $i(\omega, r)$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que chaque point du cercle de centre Ω et de rayon r est invariant par l'inversion.

e) Montrer qu'une inversion transforme un birapport en son conjugué.

f) Montrer que l'inversion préserve les droites qui passent par Ω.

g) Montrer qu'elle envoie une droite qui ne passe par Ω sur un cercle qui passe par Ω.

h) Montrer aussi qu'elle envoie tout cercle qui ne passe pas par Ω sur un cercle qui ne passe pas par Ω.

Exercice 12 (Homographies)

Une homographie est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

avec a, b, c, d complexes, tels que $ad - bc \neq 0$.

a) Montrer que toute homographie est la composée de translations, d'homothéties et au plus d'une inversion et d'une réflexion.

b) Montrer que toute homographie envoie droites ou cercles sur droites ou cercles.

c) Montrer que les homographies forment un groupe.

Exercice 13

Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents intérieurement en O. On considère une famille de cercles deux à deux tangents entre eux et tangents à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Montrer que les points de contact de ces cercles entre eux sont situés sur un même cercle tangent en O aux deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.