SOLUTIONS DE L'EXAMEN DE RATTRAPAGE

8 juin 2016

[durée : 3 heures]

Exercice 1 (Sous-espaces affines)

a) Démontrer la proposition du cours :

> *Soient $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ deux espaces vectoriels, et $\overrightarrow{\phi} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{\mathcal{E}}, \overrightarrow{\mathcal{F}})$ une application linéaire. Pour tout $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Im} \overrightarrow{\phi} \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}$, l'image réciproque $\overrightarrow{\phi}^{-1}(\overrightarrow{v})$ est un sous-espace affine de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de direction $\operatorname{Ker} \overrightarrow{\phi}$.*

b) Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(x-1) = f(x) + 2,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Déterminer un point de $\mathcal{H}$ et sa direction.

c) Est-ce que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'équation $\{(x-1)^2 + (x-y)^2 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel et/ou un sous-espace affine ? Justifier votre réponse.

Solution :

a) Comme $\overrightarrow{\phi}$ est linéaire, $\operatorname{Ker} \overrightarrow{\phi}$ est un sous-espace vectoriel. Soit $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Im} \overrightarrow{\phi}$, et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$. Soit $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\phi}^{-1}(\overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}$, et donc $\overrightarrow{\phi}^{-1}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} + \operatorname{Ker} \overrightarrow{\phi}$. On vient de démontrer que $\overrightarrow{\phi}^{-1}(\overrightarrow{v})$ est un sous-espace affine de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de direction $\operatorname{Ker} \overrightarrow{\phi}$.

b) On note $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(x-1) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ le sous-espace vectoriel des fonctions continues et 1-périodiques. Soit $g(x) = -2x$, comme $g(x-1) = -2(x-1) = g(x) + 2$, alors $g \in \mathcal{H}$. Soit $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, alors $g + \phi \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x-1) + \phi(x-1) = g(x) + \phi(x) + 2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \phi(x-1) = \phi(x) \Leftrightarrow \phi \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. Ainsi on vient de démontrer que $\mathcal{H} = g + \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et donc $\mathcal{H}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ contenant le point g et de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

c) L'ensemble $\{(x-1)^2 + (x-y)^2 = 0\} = \{(1,1)\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0, car tout ensemble à un élément en est un. Mais il n'est pas un sous-espace vectoriel car $(0,0) \notin \{(1,1)\}$.

Exercice 2 (Géométrie dans $\mathbb{R}^3$)

On se place dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$.

a) On considère les deux matrices

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Laquelle de ces deux matrices est la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^3$?

Pour la suite de l'exercice on note M cette matrice de $O(\mathbb{R}^3)$, ainsi que l'application linéaire qu'elle définit.

b) Décrire M en détail (nature, points fixes, paramètres).

c) Soit $T_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v} = (1,0,1)$. Quelle est la nature de l'application composée $T_{\vec{v}}M$?

d) Soit S la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $\{x+y-z=1\}$. Quelle est la nature de l'application composée MS ?

Solution :

a) Les vecteurs colonnes des deux matrices forment une base orthogonale, mais seulement ceux de la première forment une b.o.n. (ceux de la deuxième sont de norme 9). Donc la matrice orthogonale M est la première.

b) Comme $\det(M) = 1$, M est une rotation. Pour trouver l'axe de rotation on cherche l'ensemble des vecteurs fixes : $\mathrm{Ker}(M-I)$, et on trouve $E_1 = \langle(1,1,-1)\rangle$. Soit θ l'angle de rotation. Comme $2\cos(\theta)+1 = \mathrm{tr}(M) = -1$ on trouve que $\theta = \pi$. Ainsi M est une rotation d'angle π autour de l'axe $\langle(1,1,-1)\rangle$, autrement dit c'est une symétrie axiale d'axe $\langle(1,1,-1)\rangle$.

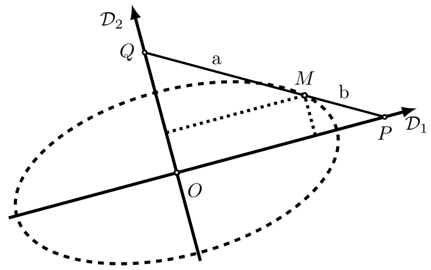
c) Comme $\vec{v} \perp (1,1,-1)$, d'après le cours, $T_{\vec{v}}M$ est aussi une symétrie axiale.

d) Comme $\{x+y-z=1\}$ est perpendiculaire à $\langle(1,1,-1)\rangle$, la composé MS est une symétrie centrale de centre $\{x+y-z=1\} \cap \langle(1,1,-1)\rangle = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. En réalité dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$ nous avons les parties linéaires qui sont $\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et donc $\overrightarrow{MS} = -\mathrm{Id}$.

Exercice 3 (Construction d'une ellipse)

Soient deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ orthogonales qui se coupent en un point O. Soient deux nombres positifs $a, b > 0$. Pour toute paire de points (P, Q) telle que $P \in \mathcal{D}_1$, $Q \in \mathcal{D}_2$ et $\mathrm{d}(P, Q) = a + b$ on considère le point $M = \frac{a}{a+b}P + \frac{b}{a+b}Q$.

Montrer que le lieu des points M est une ellipse.



Solution :

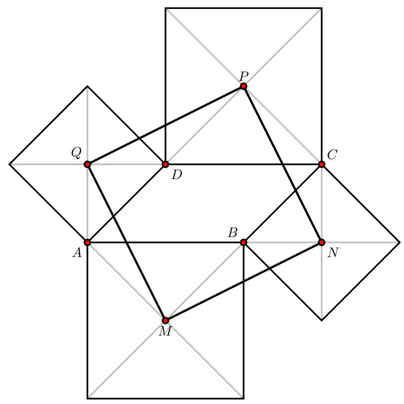
On se place dans un repère orthonormé de centre O et d'axes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Nous allons démontrer que le lieu des points M est l'ellipse $\mathcal{E} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\}$.

Soit M comme dans l'énoncé, ayant (x, y) pour coordonnées dans le repère fixé. D'après Thalès $|OP| = |x|\frac{a+b}{a}$ et $|OQ| = |y|\frac{a+b}{b}$. Et comme $|OP|^2 + |OQ|^2 = |PQ|^2$ (d'après Pythagore), on trouve $\left(x\frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(y\frac{a+b}{b}\right)^2 = (a+b)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Et donc $M \in \mathcal{E}$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{E}$ ayant (x, y) pour coordonnées dans le repère fixé. On pose $P = (x\frac{a+b}{a}, 0)$ et $Q = (0, y\frac{a+b}{b})$. Alors $\frac{a}{a+b}P + \frac{a}{a+b}Q = (x, y) = M$. Pour finir on observe que $|PQ|^2 = \left(x\frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(y\frac{a+b}{b}\right)^2 = (a+b)^2\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] = (a+b)^2$ et donc $|PQ| = a + b$.

Exercice 4 (Géométrie dans le plan complexe)

On se place dans le plan euclidien identifié avec $\mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Im}(z) > 0$. Soient A, B et D trois points d'affixes respectives 0, 1 et z. Soit un quatrième point C tel que A, B, C, D forment un parallélogramme. On construit à l'extérieur du parallélogramme $ABCD$ quatre carrés de bases les côtés et de centres M, N, P et Q (comme sur l'image ci-contre).



a) Déterminer l'affixe de C.

b) Déterminer les affixes des points M, N, P et Q.

c) Montrer que $MNPQ$ est un carré.

Solution :

a) Comme $C = B + \overrightarrow{AD}$, l'affixe de C est $1 + z$.

b) Les affixes des points sont $M = \frac{1-i}{2}$, $N = 1 + z\frac{1-i}{2}$, $P = z + \frac{1+i}{2}$ et $Q = z\frac{1+i}{2}$.
Remarque : dans une «bonne» rédaction il va falloir justifier ces résultats.

c) Les affixes des vecteurs sont $\overrightarrow{MN} = 1 + z\frac{1-i}{2} - \frac{1-i}{2} = z\frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2}$, $\overrightarrow{QP} = z + \frac{1+i}{2} - z\frac{1+i}{2} = z\frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2}$ et $\overrightarrow{MQ} = z\frac{1+i}{2} - \frac{1-i}{2}$. Donc d'une part $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ (donc c'est un parallélogramme), d'autre part comme $i\left(z\frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2}\right) = z\frac{1+i}{2} - \frac{1-i}{2}$ on a que $\overrightarrow{MQ}$ est l'image de $\overrightarrow{MN}$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, et donc il s'agit bien d'un carré.