Licence 3e année, parcours Mathématiques 2015-2016

M53, Géométrie affine et euclidienne

Examen de rattrapage

8 juin 2016

[durée : 3 heures]

⚠ **Documents autorisés :** *Une feuille A4 recto-verso écrite à la main.*

Exercice 1 (Sous-espaces affines)

a) Démontrer la proposition du cours :

> *Soient $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$ deux espaces vectoriels, et $\vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}})$ une application linéaire. Pour tout $\vec{v} \in \operatorname{Im} \vec{\phi} \subset \vec{\mathcal{F}}$, l'image réciproque $\vec{\phi}^{-1}(\vec{v})$ est un sous-espace affine de $\vec{\mathcal{E}}$ de direction $\operatorname{Ker} \vec{\phi}$.*

b) Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(x-1) = f(x) + 2,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Déterminer un point de $\mathcal{H}$ et sa direction.

c) Est-ce que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'équation $\{(x-1)^2 + (x-y)^2 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel et/ou un sous-espace affine ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 (Géométrie dans $\mathbb{R}^3$)

On se place dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$.

a) On considère les deux matrices

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Laquelle de ces deux matrices est la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^3$?

Pour la suite de l'exercice on note M cette matrice de $O(\mathbb{R}^3)$, ainsi que l'application linéaire qu'elle définit.

b) Décrire M en détail (nature, points fixes, paramètres).

c) Soit $T_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Quelle est la nature de l'application composée $T_{\vec{v}} M$?

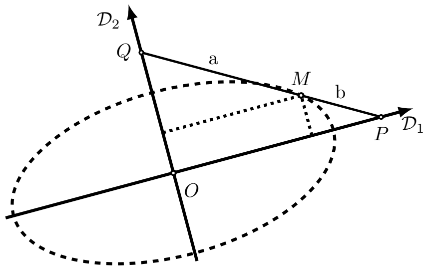
T.S.V.P.

d) Soit S la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $\{x + y - z = 1\}$. Quelle est la nature de l'application composée MS ?

Exercice 3 (Construction d'une ellipse)

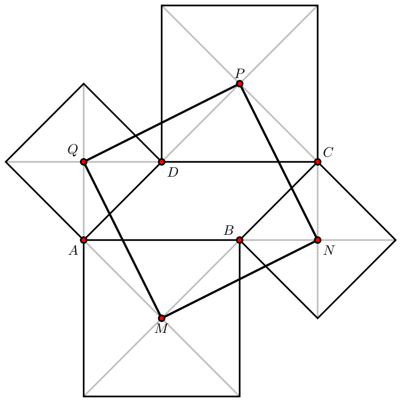
Soient deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ orthogonales qui se coupent en un point O. Soient deux nombres positifs $a, b > 0$. Pour toute paire de points (P, Q) telle que $P \in \mathcal{D}_1$, $Q \in \mathcal{D}_2$ et $\mathrm{d}(P, Q) = a + b$ on considère le point $M = \frac{a}{a+b}P + \frac{b}{a+b}Q$.

Montrer que le lieu des points M est une ellipse.



Exercice 4 (Géométrie dans le plan complexe)

On se place dans le plan euclidien identifié avec $\mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Im}(z) > 0$. Soient A, B et D trois points d'affixes respectives 0, 1 et z. Soit un quatrième point C tel que A, B, C, D forment un parallélogramme. On construit à l'extérieur du parallélogramme $ABCD$ quatre carrés de bases les côtés et de centres M, N, P et Q (comme sur l'image ci-contre).



a) Déterminer l'affixe de C.

b) Déterminer les affixes des points M, N, P et Q.

c) Montrer que $MNPQ$ est un carré.