Examen final

4 janvier 2016

[durée : 3 heures]

⚠ **Documents autorisés :** *Une feuille A4 recto-verso écrite à la main.*

Exercice 1 (Question de cours et applications)

a) Démontrer la proposition du cours :

> *Soient une bijection $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et une application $f : A \to C$, alors l'image de l'ensemble de niveau $\mathcal{L}_k(f)$ par ϕ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Pour la suite de l'exercice on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique.

b) Donner l'expression analytique d'une transformation affine ϕ qui envoie le cercle d'équation $\{x^2 + (y-1)^2 = 2\}$ sur l'ellipse d'équation $\{2x^2 + y^2 = 1\}$.

c) Existe-t-il une application définie sur $\mathbb{R}^2$ qui envoie l'ensemble d'équation $\{2x^2 + 2xy + y^2 + x - 3y = 0\}$ sur l'ensemble d'équation $\{9x^2 + 12xy + 4y^2 + 1 = 0\}$?

Exercice 2 (Géométrie dans $\mathbb{R}^3$)

On se place dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $\{2x + y = 1\}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équations $\{z = -1,\ x = y\}$.

a) Donner l'expression analytique de la projection p sur le plan $\mathcal{P}$ suivant la direction $\mathcal{D}$.

b) Donner l'expression analytique de la symétrie s par rapport à $\mathcal{P}$ suivant la direction $\mathcal{D}$.

c) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale π sur le plan $\mathcal{P}$.

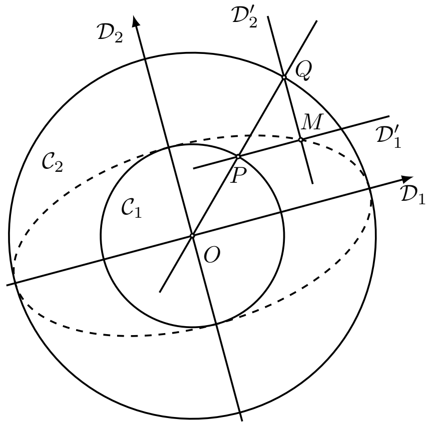
d) Calculer la distance de $A = (1, 0, 1)$ au plan $\mathcal{P}$.

e) Donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale σ par rapport à $\mathcal{P}$.

f) Soit $\mathcal{C}$ le cône standard d'équation $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Quelle est la nature de l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$? Dessiner cette intersection.

T.S.V.P.

Exercice 3 (Construction d'une ellipse)



Soient deux droites orthogonales $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui se coupent en un point O, et deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centre O et de rayons respectifs r et R avec $0 < r < R$.

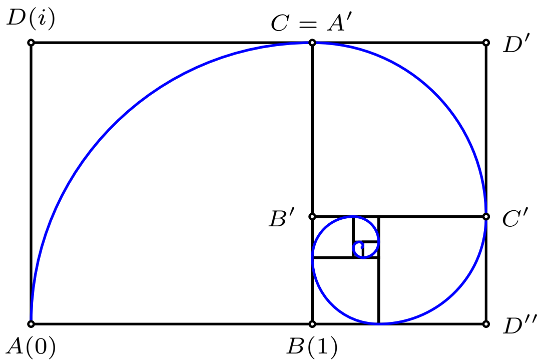
Pour tout point Q sur $\mathcal{C}_2$, soit $P = \mathcal{C}_1 \cap [O, Q]$. Soient $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ les deux droites parallèles à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et passant par P et Q respectivement.

On considère le point d'intersection de ces deux droites $M = \mathcal{D}'_1 \cap \mathcal{D}'_2$.

Montrer que quand Q parcourt $\mathcal{C}_2$ le point M parcourt une ellipse.

Exercice 4 (Géométrie dans le plan complexe)

Cet exercice est relié à la construction d'une approximation de la «spirale d'or» représentée sur la figure.



On se place dans le plan euclidien identifié avec $\mathbb{C}$. Soient A, B et D trois points d'affixes respectivement 0,1 et i. On considère le carré $ABCD$. On note $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le «nombre d'or». Il peut être utile de savoir que $\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma}$.

a) Soient $A' = C$ et $B' \in [BC]$ tel que $\gamma \|A'B'\| = 1$. On considère le carré $A'B'C'D'$ construit à l'extérieur du carré $ABCD$. Montrer qu'il existe une unique transformation affine S qui envoie $ABCD$ sur $A'B'C'D'$ en respectant les sommets ($S(A) = A'$, $S(B) = B'$, ...).

b) Soient z l'affixe d'un point M et $S(z)$ l'affixe de son image $S(M)$. Exprimer $S(z)$ en fonction de z et γ.

c) Quelle est la nature de S ? Quelle est la nature de γS ?

d) Déterminer l'ensemble des points fixes de S.

e) Soit $D'' = S(D')$. Montrer que $ADD'D''$ est un rectangle. Puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S^n(ABCD) \subset ADD'D''$.

f) Montrer que $S^3(D) = B$. Existe-t-il un autre $n \in \mathbb{N}$ pour lequel on a la même relation $S^n(D) = B$?