Solutions de l'interrogation

3 novembre 2015

[durée : 2 heures]

Exercice 1 (Question de cours)

Démontrer le résultat du cours suivant :

> *Dans un espace affine euclidien, une homothétie affine de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est une isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.*

Solution :

Soient A et B deux points de l'espace affine euclidien et H une homothétie affine de rapport λ. On a :

$$d(H(A), H(B)) \overset{①}{=} \|\overrightarrow{H(A)H(B)}\| \overset{②}{=} \|\vec{H}(\overrightarrow{AB})\| \overset{③}{=} \|\lambda\overrightarrow{AB}\| \overset{④}{=} |\lambda|\|\overrightarrow{AB}\| \overset{⑤}{=} |\lambda| d(A, B).$$

①+⑤ Par la définition de la distance dans un espace affine euclidien.

② Par la définition de la partie linéaire d'une application affine.

③ Car $\vec{H} = \lambda \mathrm{Id}$, vu que H une homothétie affine de rapport λ.

④ Par la définition de la norme.

Ainsi H est une isométrie ssi $|\lambda| = 1$, c.-à-d. ssi $\lambda = 1$, auquel cas $H = \mathrm{Id}$, ou $\lambda = -1$ auquel cas $\vec{H} = -\mathrm{Id}$ et donc H est une symétrie centrale (par définition).

Exercice 2 (Espaces affines euclidiens)

On se place dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2, muni du produit scalaire $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^t B)$, où A^t est la transposée de la matrice A, et tr est l'application trace.

a) Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)$ deux éléments de $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{ij}.$$

b) Déterminer une matrice T telle que $\mathrm{tr}(M) = \langle T|M\rangle$, pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{H} = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{tr}(M) = 2\}$.

c) Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace affine de $M_2(\mathbb{R})$, puis déterminer sa direction $\vec{\mathcal{H}}$.

d) Déterminer la direction orthogonale $\vec{\mathcal{H}}^{\perp}$.

e) Calculer la distance de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ au sous-espace affine $\mathcal{H}$.

f) Soit π la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$. Calculer $\pi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

g) Déterminer la partie linéaire $\vec{\pi}$ de la projection π. Quelle est la nature de $\vec{\pi}$?

Solution :

a) $A^tB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$ et donc

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^tB) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{ij}.$$

b) Soit $\mathrm{I}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comme $\langle \mathrm{I}_2|M\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{I}_2^tM) = \mathrm{tr}(M)$, $T = \mathrm{I}_2$ convient.

Soit $\mathcal{H} = \left\{M \in M_2(\mathbb{R}) \middle| \mathrm{tr}(M) = 2\right\}$.

c) On applique le résultat du cours sur la pré-image d'un espace affine par une application linéaire. Comme tr est une forme linéaire surjective, alors $\mathcal{H} = \mathrm{tr}^{-1}(\{2\})$ est un espace affine de direction $\vec{\mathcal{H}} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$. Autrement dit, $\vec{\mathcal{H}}$ est l'espace des matrices de trace nulle.

d) D'après b) $\mathrm{tr}(M) = 0 \Leftrightarrow M \perp \mathrm{I}_2$, et donc, d'après c), $\vec{\mathcal{H}} = \{\mathrm{I}_2\}^\perp$.
Ainsi $\vec{\mathcal{H}}^\perp = \langle \mathrm{I}_2\rangle = \left\{\lambda \mathrm{I}_2 \in M_2(\mathbb{R}) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

e) Nous savons que $d(A, \mathcal{H}) = \|\vec{V}\|$ si $A + \vec{V} \in \mathcal{H}$ et $\vec{V} \perp \mathcal{H}$, autrement dit si $A + \vec{V}$ est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{H}$. D'après la question précédente on cherche λ (avec $\vec{V} = \lambda \mathrm{I}_2$) tel que $\mathrm{tr}(A + \lambda \mathrm{I}_2) = 2 \Leftrightarrow 5 + 2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = -3/2$. Ainsi $d(A, \mathcal{H}) = \| -\frac{3}{2}\mathrm{I}_2\| = \frac{3}{2}\|\mathrm{I}_2\| = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

f) Comme dans la question précédente, $\pi(A) = A + \lambda \mathrm{I}_2$ avec $\mathrm{tr}(A + \lambda \mathrm{I}_2) = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1 - \mathrm{tr}(A)/2 \Leftrightarrow \lambda = 1 - (a+d)/2$. Ainsi $\pi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) + (1 - \frac{a+d}{2})\mathrm{I}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1+(a-d)/2 & b \\ c & 1+(d-a)/2 \end{smallmatrix}\right)$.

g) Comme $\pi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} (a-d)/2 & b \\ c & (d-a)/2 \end{smallmatrix}\right) + \mathrm{I}_2$ est la composée d'une application linéaire et de la translation par I_2, nous avons que $\vec{\pi}$ est l'application linéaire donnée par $\vec{\pi}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} (a-d)/2 & b \\ c & (d-a)/2 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 3 (Géométrie dans $\mathbb{C}$)

On considère le triangle ABC défini par trois points du plan A, B, C non alignés. On rappelle que *la médiatrice* du segment $[MN]$, $M \neq N$, est la droite perpendiculaire à la droite $\langle MN\rangle$ passant par le milieu de $[MN]$.

a) Montrer que les médiatrices de $[AB]$, de $[BC]$ et de $[CA]$ se coupent en un point Ω tel que A, B et C sont sur un cercle de centre Ω. Ce cercle est appelé *cercle circonscrit* au triangle ABC.
Indication : on pourra remarquer que deux des trois médiatrices se coupent en un point également situé sur la troisième.

On identifie le plan euclidien au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

b) On suppose que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point O d'affixe 0. Soient a, b, c les affixes des points A, B, C. On note H le point d'affixe $a+b+c$.

(i) Calculer $(b+c)\overline{(c-b)}$ et $\overline{(b+c)}(c-b)$.

(ii) En déduire que $\langle AH \rangle$ est orthogonale à $\langle BC \rangle$.

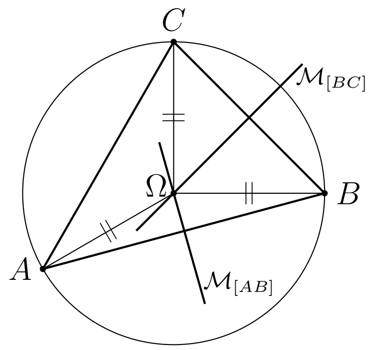
(iii) Montrer que les trois hauteurs du triangle ABC se coupent en H, dit *orthocentre* du triangle.

(iv) En déduire que le centre O du cercle circonscrit, l'orthocentre H et *le centre de gravité* G du triangle ABC (c.-à-d. l'isobarycentre de A, B et C) sont alignés. Peut-on préciser comment ?

c) Montrer que dans tout triangle du plan le centre Ω du cercle circonscrit, l'orthocentre H et le centre de gravité G sont alignés, et exprimer G comme barycentre de Ω et H.

Solution :

a) La médiatrice de $[MN]$, noté $\mathcal{M}_{[MN]}$ est l'ensemble des points qui sont à distance égale de M et de N. Comme $[AB]$ et $[BC]$ ne sont pas parallèles, leurs médiatrices ne sont pas parallèles, et donc se coupent en un point $\Omega = \mathcal{M}_{[AB]} \cap \mathcal{M}_{[BC]}$. Nous avons $\Omega \in \mathcal{M}_{[AB]} \Rightarrow d(\Omega, A) = d(\Omega, B)$, et $\Omega \in \mathcal{M}_{[BC]} \Rightarrow d(\Omega, B) = d(\Omega, C)$. Ainsi $d(\Omega, A) = d(\Omega, B) = d(\Omega, C)$ et donc d'une part $d(\Omega, A) = d(\Omega, C) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{M}_{[AC]}$, et d'autre part le cercle de centre Ω et de rayon $R = d(\Omega, A) = d(\Omega, B) = d(\Omega, C)$ contient les points A, B et C.



On identifie le plan euclidien au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

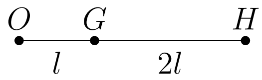
b) On suppose que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point O d'affixe 0. Soient a, b, c les affixes des points A, B, C. On note H le point d'affixe $h = a+b+c$.

(i) Comme $\|OA\| = \|OB\| = \|OC\|$, nous avons $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$. Ainsi
$(b+c)\overline{(c-b)} = b\overline{c} - b\overline{b} + c\overline{c} - c\overline{b} = b\overline{c} - c\overline{b}$, et
$\overline{(b+c)}(c-b) = \overline{b}c - \overline{b}b + \overline{c}c - \overline{c}b = \overline{b}c - \overline{c}b$.

(ii) Nous avons $\langle AH \rangle \perp \langle BC \rangle \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AH} | \overrightarrow{BC} \rangle = 0 \Leftrightarrow (h-a)\overline{(c-b)} + \overline{(h-a)}(c-b) = 0 \Leftrightarrow (b+c)\overline{(c-b)} + \overline{(b+c)}(c-b) = 0$. Mais d'après la question précédente $(b+c)\overline{(c-b)} + \overline{(b+c)}(c-b) = b\overline{c} - c\overline{b} + \overline{b}c - \overline{c}b = 0$.

(iii) D'après la question précédente H est sur la hauteur de A vers BC. On peut déduire de même que H est également sur les deux autres hauteurs.

(iv) L'affixe de l'isobarycentre G est $\frac{a+b+c}{3}$ et donc $G = \frac{2}{3}O + \frac{1}{3}H$. Ainsi G se situe sur le segment $[OH]$ en le divisant dans le rapport $1:2$.



c) Soit ABC un triangle quelconque de centre du cercle circonscrit Ω, d'orthocentre H et de centre de gravité G. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$. Comme T préserve les barycentres, $T(G)$ est le centre de gravité du triangle $T(ABC)$. Comme T est une isométrie, $T(\Omega) = O$ est le centre du cercle circonscrit de $T(ABC)$ (T préserve les distances de Ω à A,B et C), et $T(H)$ est l'orthocentre de $T(ABC)$ (T préserve l'orthogonalité).

Ainsi d'après la question précédente $T(G) = \frac{1}{3}T(\Omega) + \frac{2}{3}T(H)$ et donc, en appliquant T^{-1} des deux côtés, on trouve $G = \frac{1}{3}\Omega + \frac{2}{3}H$.