# Interrogation

3 novembre 2015

[ durée : 2 heures ]

**Documents autorisés :** *Une feuille A4 recto-verso écrite à la main.*

## Exercice 1 (Question de cours)

Démontrer le résultat du cours suivant :

> *Dans un espace affine euclidien, une homothétie affine de rapport $\lambda$ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est une isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.*

## Exercice 2 (Espaces affines euclidiens)

On se place dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices $2 \times 2$, muni du produit scalaire $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^t B)$, où $A^t$ est la transposée de la matrice $A$, et tr est l'application trace.

**a)** Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ deux éléments de $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}.$$

**b)** Déterminer une matrice $T$ telle que $\mathrm{tr}(M) = \langle T|M\rangle$, pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{H} = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) \middle| \mathrm{tr}(M) = 2 \right\}$.

**c)** Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace affine de $M_2(\mathbb{R})$, puis déterminer sa direction $\vec{\mathcal{H}}$.

**d)** Déterminer la direction orthogonale $\vec{\mathcal{H}}^{\perp}$.

**e)** Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ au sous-espace affine $\mathcal{H}$.

**f)** Soit $\pi$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$. Calculer $\pi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

**g)** Déterminer la partie linéaire $\vec{\pi}$ de la projection $\pi$. Quelle est la nature de $\vec{\pi}$ ?

T.S.V.P.

**Exercice 3** (Géométrie dans $\mathbb{C}$)

On considère le triangle $ABC$ défini par trois points du plan $A, B, C$ non alignés. On rappelle que *la médiatrice* du segment $[MN]$, $M \neq N$, est la droite perpendiculaire à la droite $\langle MN \rangle$ passant par le milieu de $[MN]$.

**a)** Montrer que les médiatrices de $[AB]$, de $[BC]$ et de $[CA]$ se coupent en un point $\Omega$ tel que $A, B$ et $C$ sont sur un cercle de centre $\Omega$. Ce cercle est appelé *cercle circonscrit* au triangle $ABC$.
*Indication : on pourra remarquer que deux des trois médiatrices se coupent en un point également situé sur la troisième.*

On identifie le plan euclidien au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

**b)** On suppose que le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$ est le point $O$ d'affixe $0$. Soient $a, b, c$ les affixes des points $A, B, C$. On note $H$ le point d'affixe $a + b + c$.

(i) Calculer $(b + c)\overline{(c - b)}$ et $\overline{(b + c)}(c - b)$.

(ii) En déduire que $\langle AH \rangle$ est orthogonale à $\langle BC \rangle$.

(iii) Montrer que les trois hauteurs du triangle $ABC$ se coupent en $H$, dit *orthocentre* du triangle.

(iv) En déduire que le centre $O$ du cercle circonscrit, l'orthocentre $H$ et *le centre de gravité* $G$ du triangle $ABC$ (c.-à-d. l'isobarycentre de $A$, $B$ et $C$) sont alignés. Peut-on préciser comment ?

**c)** Montrer que dans tout triangle du plan le centre $\Omega$ du cercle circonscrit, l'orthocentre $H$ et le centre de gravité $G$ sont alignés, et exprimer $G$ comme barycentre de $\Omega$ et $H$.