# M53 - Partie 3

novembre 2015

# Définition d'un cône



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$ et $O \in \mathcal{E}$.

## Définition

Un ensemble $\mathcal{C}$ est dit cône de centre $O \in \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, $\mathcal{C}$ contient la droite $\langle O, M \rangle$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, card $\left(\langle O, M \rangle \cap \mathcal{B}\right) = 1$.

## Définition-Proposition

*Soient $O \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cône de centre $O$ engendré par $\mathcal{F}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cône de centre $O$ contenant $\mathcal{F}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} \langle O, M \rangle$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$, où $H_{O,\lambda}$ est l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$.*

# Définition d'un cône



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$ et $O \in \mathcal{E}$.

## Définition

Un ensemble $\mathcal{C}$ est dit cône de centre $O \in \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, $\mathcal{C}$ contient la droite $\langle O, M \rangle$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, $\operatorname{card}\left(\langle O, M \rangle \cap \mathcal{B}\right) = 1$.

## Définition-Proposition

*Soient $O \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cône de centre $O$ engendré par $\mathcal{F}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cône de centre $O$ contenant $\mathcal{F}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} \langle O, M \rangle$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$, où $H_{O,\lambda}$ est l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$.*

# Définition d'un cône

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$ et $O \in \mathcal{E}$.

## Définition

Un ensemble $\mathcal{C}$ est dit cône de centre $O \in \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, $\mathcal{C}$ contient la droite $\langle O, M \rangle$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, $\operatorname{card}\big(\langle O, M \rangle \cap \mathcal{B}\big) = 1$.

## Définition-Proposition

*Soient $O \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cône de centre $O$ engendré par $\mathcal{F}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cône de centre $O$ contenant $\mathcal{F}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} \langle O, M \rangle$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$, où $H_{O,\lambda}$ est l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$.*

# Définition d'un cône



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$ et $O \in \mathcal{E}$.

## Définition

Un ensemble $\mathcal{C}$ est dit cône de centre $O \in \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, $\mathcal{C}$ contient la droite $\langle O, M \rangle$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, card $\big(\langle O, M \rangle \cap \mathcal{B}\big) = 1$.

## Définition-Proposition

*Soient $O \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cône de centre $O$ engendré par $\mathcal{F}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cône de centre $O$ contenant $\mathcal{F}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} \langle O, M \rangle$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$, où $H_{O,\lambda}$ est l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$.*

# Définition d'un cône



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$ et $O \in \mathcal{E}$.

## Définition

Un ensemble $\mathcal{C}$ est dit cône de centre $O \in \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, $\mathcal{C}$ contient la droite $\langle O, M\rangle$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, $\operatorname{card}\big(\langle O, M\rangle \cap \mathcal{B}\big) = 1$.

## Définition-Proposition

*Soient $O \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cône de centre $O$ engendré par $\mathcal{F}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cône de centre $O$ contenant $\mathcal{F}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} \langle O, M\rangle$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$, où $H_{O,\lambda}$ est l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$.*

# Définition d'un cône



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$ et $O \in \mathcal{E}$.

## Définition

Un ensemble $\mathcal{C}$ est dit cône de centre $O \in \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, $\mathcal{C}$ contient la droite $\langle O, M \rangle$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, card $\left(\langle O, M \rangle \cap \mathcal{B}\right) = 1$.

## Définition-Proposition

*Soient $O \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cône de centre $O$ engendré par $\mathcal{F}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cône de centre $O$ contenant $\mathcal{F}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} \langle O, M \rangle$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$, où $H_{O,\lambda}$ est l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$.*

# Définition d'un cône



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$ et $O \in \mathcal{E}$.

## Définition

Un ensemble $\mathcal{C}$ est dit cône de centre $O \in \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, $\mathcal{C}$ contient la droite $\langle O, M\rangle$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, card $\big(\langle O, M\rangle \cap \mathcal{B}\big) = 1$.

## Définition-Proposition

*Soient $O \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cône de centre $O$ engendré par $\mathcal{F}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cône de centre $O$ contenant $\mathcal{F}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} \langle O, M\rangle$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$, où $H_{O,\lambda}$ est l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$.*

# Le cône standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cône standard $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
2. *$\mathcal{C}$ est le cône de centre 0 engendré par le cercle $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.*
3. *$\mathcal{C}$ est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe $Oz$ de la droite vectorielle $\{x = z, y = 0\}$.*

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les **coniques** (**ellipses**, **paraboles** et **hyperboles** [illegible]) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

# Le cône standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cône standard* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
2. *$\mathcal{C}$ est le cône de centre $0$ engendré par le cercle $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.*
3. *$\mathcal{C}$ est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe $Oz$ de la droite vectorielle $\{x = z, y = 0\}$.*

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les **coniques** (**ellipses**, **paraboles** et **hyperboles**, éventuellement dégénérées en des droites ou en un point) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

# Le cône standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cône standard $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
2. *$\mathcal{C}$ est le cône de centre $0$ engendré par le cercle $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.*
3. *$\mathcal{C}$ est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe $Oz$ de la droite vectorielle $\{x = z, y = 0\}$.*

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les **coniques** (**ellipses**, **paraboles** et **hyperboles**, éventuellement dégénérées en des droites ou en un point) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

# Le cône standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cône standard* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
2. $\mathcal{C}$ *est le cône de centre* $0$ *engendré par le cercle* $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.
3. $\mathcal{C}$ *est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle* $\{x = z, y = 0\}$.

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les **coniques** (**ellipses**, **paraboles** et **hyperboles** [illegible] des droites ou en un point) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

# Le cône standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

**Définition-Proposition**

*Le cône standard $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
2. *$\mathcal{C}$ est le cône de centre $0$ engendré par le cercle $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.*
3. *$\mathcal{C}$ est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe $Oz$ de la droite vectorielle $\{x = z, y = 0\}$.*

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les **coniques** (**ellipses**, **paraboles** et **hyperboles**, éventuellement dégénérées en des droites ou en un point) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

# Le cône standard

On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cône standard $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
2. *$\mathcal{C}$ est le cône de centre $0$ engendré par le cercle $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.*
3. *$\mathcal{C}$ est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe $Oz$ de la droite vectorielle $\{x = z, y = 0\}$.*

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les **coniques** (**ellipses**, **paraboles** et **hyperboles**, éventuellement dégénérées en des droites ou en un point) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

# Le cône standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

**Définition-Proposition**

*Le cône standard $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
2. *$\mathcal{C}$ est le cône de centre $0$ engendré par le cercle $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.*
3. *$\mathcal{C}$ est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe $Oz$ de la droite vectorielle $\{x = z, y = 0\}$.*

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les **coniques** (**ellipses**, **paraboles** et **hyperboles**, éventuellement dégénérées en des droites ou en un point) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

# Le cône standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cône standard $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
2. *$\mathcal{C}$ est le cône de centre $0$ engendré par le cercle $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.*
3. *$\mathcal{C}$ est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe $Oz$ de la droite vectorielle $\{x = z, y = 0\}$.*

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les **coniques** (**ellipses**, **paraboles** et **hyperboles**, éventuellement dégénérées en des droites ou en un point) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

# Exemples moins standards



1. L'espace tout entier $\mathbb{R}^n$ est un cône de centre $0$ et de base « la moitié » de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. Toute réunion d'espaces vectoriels est un cône de centre $0$.
3. $C = \{x^2 = yz\}$ est un cône de centre $0$ et de base l'ellipse $\{x^2 + (y-1)^2 = 1, y + z = 2\}$.
4. Les images directes et inverses d'un cône par des applications affines sont des cônes.

# Exemples moins standards



1. L'espace tout entier $\mathbb{R}^n$ est un cône de centre $0$ et de base « la moitié » de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. Toute réunion d'espaces vectoriels est un cône de centre $0$.
3. $C = \{x^2 = yz\}$ est un cône de centre $0$ et de base l'ellipse $\{x^2 + (y-1)^2 = 1, y+z = 2\}$.
4. Les images directes et inverses d'un cône par des applications affines sont des cônes.

# Exemples moins standards



1. L'espace tout entier $\mathbb{R}^n$ est un cône de centre $0$ et de base « la moitié » de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. Toute réunion d'espaces vectoriels est un cône de centre $0$.
3. $C = \{x^2 = yz\}$ est un cône de centre $0$ et de base l'ellipse $\{x^2 + (y-1)^2 = 1, y + z = 2\}$.
4. Les images directes et inverses d'un cône par des applications affines sont des cônes.

# Exemples moins standards



1. L'espace tout entier $\mathbb{R}^n$ est un cône de centre $0$ et de base « la moitié » de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. Toute réunion d'espaces vectoriels est un cône de centre $0$.
3. $\mathcal{C} = \{x^2 = yz\}$ est un cône de centre $0$ et de base l'ellipse $\{x^2 + (y-1)^2 = 1, y + z = 2\}$.
4. Les images directes et inverses d'un cône par des applications affines sont des cônes.

# Exemples moins standards



1. L'espace tout entier $\mathbb{R}^n$ est un cône de centre $0$ et de base « la moitié » de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. Toute réunion d'espaces vectoriels est un cône de centre $0$.
3. $\mathcal{C} = \{x^2 = yz\}$ est un cône de centre $0$ et de base l'ellipse $\{x^2 + (y-1)^2 = 1, y + z = 2\}$.
4. Les images directes et inverses d'un cône par des applications affines sont des cônes.

# Définition d'un cylindre



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions.

## Définition

Un ensemble non vide $\mathcal{C}$ est dit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ contient le sous-espace affine $M + \vec{\mathcal{F}}$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, card $\left((M + \vec{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}\right) = 1$.

Le plus souvent la direction $\vec{\mathcal{F}}$ est une droite.

## Définition-Proposition

*Soient $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par $\mathcal{B}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{B}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{B}} (M + \vec{\mathcal{F}})$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}} T_{\vec{v}}(\mathcal{B})$, où $T_{\vec{v}}$ est la translation par le vecteur $\vec{v}$.*

# Définition d'un cylindre



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions.

## Définition

Un ensemble non vide $\mathcal{C}$ est dit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ contient le sous-espace affine $M + \vec{\mathcal{F}}$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, card $\left((M + \vec{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}\right) = 1$.

Le plus souvent la direction $\vec{\mathcal{F}}$ est une droite.

## Définition-Proposition

*Soient $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par $\mathcal{B}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{B}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{B}} (M + \vec{\mathcal{F}})$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}} T_{\vec{v}}(\mathcal{B})$, où $T_{\vec{v}}$ est la translation par le vecteur $\vec{v}$.*

# Définition d'un cylindre



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions.

## Définition

Un ensemble non vide $\mathcal{C}$ est dit cylindre de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ contient le sous-espace affine $M + \overrightarrow{\mathcal{F}}$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, card $\left((M + \overrightarrow{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}\right) = 1$.

Le plus souvent la direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est une droite.

## Définition-Proposition

*Soient $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cylindre de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ engendré par $\mathcal{B}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cylindre de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{B}$.*
2. $\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{B}} (M + \overrightarrow{\mathcal{F}})$.
3. $\mathcal{C} = \bigcup_{\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}} T_{\overrightarrow{v}}(\mathcal{B})$, *où $T_{\overrightarrow{v}}$ est la translation par le vecteur $\overrightarrow{v}$.*

# Définition d'un cylindre



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions.

## Définition

Un ensemble non vide $\mathcal{C}$ est dit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ contient le sous-espace affine $M + \vec{\mathcal{F}}$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, card $\big((M + \vec{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}\big) = 1$.
Le plus souvent la direction $\vec{\mathcal{F}}$ est une droite.

## Définition-Proposition

*Soient $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par $\mathcal{B}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{B}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{B}} (M + \vec{\mathcal{F}})$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}} T_{\vec{v}}(\mathcal{B})$, où $T_{\vec{v}}$ est la translation par le vecteur $\vec{v}$.*

# Définition d'un cylindre



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions.

## Définition

Un ensemble non vide $\mathcal{C}$ est dit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ contient le sous-espace affine $M + \vec{\mathcal{F}}$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, card $\left((M + \vec{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}\right) = 1$.
Le plus souvent la direction $\vec{\mathcal{F}}$ est une droite.

## Définition-Proposition

*Soient $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par $\mathcal{B}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{B}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{B}} (M + \vec{\mathcal{F}})$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}} T_{\vec{v}}(\mathcal{B})$, où $T_{\vec{v}}$ est la translation par le vecteur $\vec{v}$.*

# Définition d'un cylindre

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions.

## Définition

Un ensemble non vide $\mathcal{C}$ est dit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ contient le sous-espace affine $M + \vec{\mathcal{F}}$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, card $\left((M + \vec{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}\right) = 1$.
Le plus souvent la direction $\vec{\mathcal{F}}$ est une droite.

## Définition-Proposition

*Soient $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par $\mathcal{B}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{B}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{B}} (M + \vec{\mathcal{F}})$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}} T_{\vec{v}}(\mathcal{B})$, où $T_{\vec{v}}$ est la translation par le vecteur $\vec{v}$.*

# Définition d'un cylindre

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions.

## Définition

Un ensemble non vide $\mathcal{C}$ est dit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ contient le sous-espace affine $M + \vec{\mathcal{F}}$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, card $\left((M + \vec{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}\right) = 1$.
Le plus souvent la direction $\vec{\mathcal{F}}$ est une droite.

## Définition-Proposition

*Soient $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par $\mathcal{B}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{B}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{B}} (M + \vec{\mathcal{F}})$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}} T_{\vec{v}}(\mathcal{B})$, où $T_{\vec{v}}$ est la translation par le vecteur $\vec{v}$.*

# Définition d'un cylindre



Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions.

## Définition

Un ensemble non vide $\mathcal{C}$ est dit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ contient le sous-espace affine $M + \vec{\mathcal{F}}$. Et on dit que $\mathcal{C}$ est de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ si pour tout $M \in \mathcal{C}$, card $\left((M + \vec{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}\right) = 1$.
Le plus souvent la direction $\vec{\mathcal{F}}$ est une droite.

## Définition-Proposition

*Soient $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de directions, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ non vide, on dit que $\mathcal{C}$ est le cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par $\mathcal{B}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *$\mathcal{C}$ est le plus petit cylindre de direction $\vec{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{B}$.*
2. *$\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{B}} (M + \vec{\mathcal{F}})$.*
3. *$\mathcal{C} = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}} T_{\vec{v}}(\mathcal{B})$, où $T_{\vec{v}}$ est la translation par le vecteur $\vec{v}$.*

# Le cylindre standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cylindre standard* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $\mathcal{C}$ *est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle* $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
3. $\mathcal{C}$ *est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle* $\{x = 1, y = 0\}$.

L'intersection du cylindre standard avec un hyperplan est une ellipse, deux droites, une droite, ou bien vide.

# Le cylindre standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cylindre standard* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $\mathcal{C}$ *est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle* $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
3. $\mathcal{C}$ *est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle* $\{x = 1, y = 0\}$.

L'intersection du cylindre standard avec un hyperplan est une ellipse, deux droites, une droite, ou bien vide.

# Le cylindre standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cylindre standard* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $\mathcal{C}$ *est le cylindre de direction* $Oz$ *engendré par le cercle* $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
3. $\mathcal{C}$ *est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe* $Oz$ *de la droite vectorielle* $\{x = 1, y = 0\}$.

L'intersection du cylindre standard avec un hyperplan est une ellipse, deux droites, une droite, ou bien vide.

# Le cylindre standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cylindre standard* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $\mathcal{C}$ *est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle* $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
3. $\mathcal{C}$ *est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle* $\{x = 1, y = 0\}$.

L'intersection du cylindre standard avec un hyperplan est une ellipse, deux droites, une droite, ou bien vide.

# Le cylindre standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cylindre standard* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $\mathcal{C}$ *est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle* $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
3. $\mathcal{C}$ *est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle* $\{x = 1, y = 0\}$.

L'intersection du cylindre standard avec un hyperplan est une ellipse, deux droites, une droite, ou bien vide.

# Le cylindre standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cylindre standard* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $\mathcal{C}$ *est le cylindre de direction* $Oz$ *engendré par le cercle* $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
3. $\mathcal{C}$ *est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe* $Oz$ *de la droite vectorielle* $\{x = 1, y = 0\}$.

L'intersection du cylindre standard avec un hyperplan est une ellipse, deux droites, une droite, ou bien vide.

# Le cylindre standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cylindre standard* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $\mathcal{C}$ *est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle* $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
3. $\mathcal{C}$ *est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle* $\{x = 1, y = 0\}$.

L'intersection du cylindre standard avec un hyperplan est une ellipse, deux droites, une droite, ou bien vide.

# Le cylindre standard



On se place dans $\mathbb{R}^3$, vu comme espace affine.

## Définition-Proposition

*Le cylindre standard* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est défini par l'une des conditions équivalentes :*

1. $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $\mathcal{C}$ *est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle* $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
3. $\mathcal{C}$ *est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle* $\{x = 1, y = 0\}$.

L'intersection du cylindre standard avec un hyperplan est une ellipse, deux droites, une droite, ou bien vide.

# Définition de courbe de niveau



Soit une application $f\colon A \to B$ entre ensembles.

## Définition

Soit $k \in B$, l'ensemble $\mathcal{L}_k = f^{-1}(\{k\})$ est appelé la courbe de niveau $k$ de $f$. On peut également l'appeler la ligne de niveau $k$ ou l'ensemble de niveau $k$ de $f$, et des notations alternatives sont $\mathcal{L}_k(f)$ ou $\mathcal{L}_{f,k}$.

La terminologie «courbe de niveau» prend tout son sens quand $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et $k$ une valeur régulière.

# Définition de courbe de niveau



Soit une application $f\colon A \to B$ entre ensembles.

## Définition

Soit $k \in B$, l'ensemble $\mathcal{L}_k = f^{-1}(\{k\})$ est appelé la courbe de niveau $k$ de $f$. On peut également l'appeler la ligne de niveau $k$ ou l'ensemble de niveau $k$ de $f$, et des notations alternatives sont $\mathcal{L}_k(f)$ ou $\mathcal{L}_{f,k}$.

La terminologie «courbe de niveau» prend tout son sens quand $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et $k$ une valeur régulière.

# Définition de courbe de niveau



Soit une application $f\colon A \to B$ entre ensembles.

## Définition

Soit $k \in B$, l'ensemble $\mathcal{L}_k = f^{-1}(\{k\})$ est appelé la courbe de niveau $k$ de $f$. On peut également l'appeler la ligne de niveau $k$ ou l'ensemble de niveau $k$ de $f$, et des notations alternatives sont $\mathcal{L}_k(f)$ ou $\mathcal{L}_{f,k}$.

La terminologie «courbe de niveau» prend tout son sens quand $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et $k$ une valeur régulière.

# Exemples de courbes de niveaux



1. Pour $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\mathcal{L}_k$ est un cercle, un point, ou vide, selon que $k$ soit positif (valeur régulière), nul ou négatif.
2. Pour $f(x, y) = ax + by$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, les $\mathcal{L}_k$ sont les droites affines de direction la droite vectorielle $\mathcal{L}_0$.
3. Plus généralement tout ensemble défini par des équations $\{x \in \mathcal{E} \mid f_1(x) = b_1, \dots, f_p(x) = b_p\}$ est la courbe de niveau $(b_1, \dots, b_p)$ de l'application $f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big)$.

# Exemples de courbes de niveaux



1. Pour $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\mathcal{L}_k$ est un cercle, un point, ou vide, selon que $k$ soit positif (valeur régulière), nul ou négatif.
2. Pour $f(x,y) = ax + by$, avec $(a,b) \neq (0,0)$, les $\mathcal{L}_k$ sont les droites affines de direction la droite vectorielle $\mathcal{L}_0$.
3. Plus généralement tout ensemble défini par des équations $\{x \in \mathcal{E} \mid f_1(x) = b_1, \ldots, f_p(x) = b_p\}$ est la courbe de niveau $(b_1, \ldots, b_p)$ de l'application $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$.

# Exemples de courbes de niveaux



1. Pour $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\mathcal{L}_k$ est un cercle, un point, ou vide, selon que $k$ soit positif (valeur régulière), nul ou négatif.
2. Pour $f(x, y) = ax + by$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, les $\mathcal{L}_k$ sont les droites affines de direction la droite vectorielle $\mathcal{L}_0$.
3. Plus généralement tout ensemble défini par des équations $\{x \in \mathcal{E} \mid f_1(x) = b_1, \ldots, f_p(x) = b_p\}$ est la courbe de niveau $(b_1, \ldots, b_p)$ de l'application $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$.

# Exemples de courbes de niveaux



1. Pour $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\mathcal{L}_k$ est un cercle, un point, ou vide, selon que $k$ soit positif (valeur régulière), nul ou négatif.
2. Pour $f(x, y) = ax + by$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, les $\mathcal{L}_k$ sont les droites affines de direction la droite vectorielle $\mathcal{L}_0$.
3. Plus généralement tout ensemble défini par des équations $\{x \in \mathcal{E} \mid f_1(x) = b_1, \ldots, f_p(x) = b_p\}$ est la courbe de niveau $(b_1, \ldots, b_p)$ de l'application $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$.

# Image d'une courbe de niveau



## Proposition

*Soit un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et $f : A \to C$, alors l'image de $\mathcal{L}_k(f)$ par $\phi$ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Exemples :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (ax, by)$. Alors l'image du cercle unité par $\phi$ est l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$.
   1. $\phi(\{x^2 + y^2 = 1\}) = \{x^2 + y^2 = 2\}$.
   2. $\phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a - b) + y(a + b) = 2\}$.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$. Alors l'image du cône standard est le cône d'équation $\{x^2 = yz\}$.

## Proposition

*Soient $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\phi$ un isomorphisme. Alors les équations qui définissent $\mathcal{L}_k$ dans $\mathcal{R}$ sont les mêmes que les équations qui définissent $\phi(\mathcal{L}_k)$ dans le repère image $\phi(\mathcal{R})$.*

# Image d'une courbe de niveau



## Proposition

*Soit un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et $f : A \to C$, alors l'image de $\mathcal{L}_k(f)$ par $\phi$ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Exemples :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (ax, by)$. Alors l'image du cercle unité par $\phi$ est l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$.
   1. $\phi(\{x^2 + y^2 = 1\}) = \{x^2 + y^2 = 2\}$.
   2. $\phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a - b) + y(a + b) = 2\}$.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$. Alors l'image du cône standard est le cône d'équation $\{x^2 = yz\}$.

## Proposition

*Soient $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\phi$ un isomorphisme. Alors les équations qui définissent $\mathcal{L}_k$ dans $\mathcal{R}$ sont les mêmes que les équations qui définissent $\phi(\mathcal{L}_k)$ dans le repère image $\phi(\mathcal{R})$.*

# Image d'une courbe de niveau



## Proposition

*Soit un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et $f : A \to C$, alors l'image de $\mathcal{L}_k(f)$ par $\phi$ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Exemples :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (ax, by)$. Alors l'image du cercle unité par $\phi$ est l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$.
   1. $\phi(\{x^2 + y^2 = 1\}) = \{x^2 + y^2 = 2\}$.
   2. $\phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a - b) + y(a + b) = 2\}$.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$. Alors l'image du cône standard est le cône d'équation $\{x^2 = yz\}$.

## Proposition

*Soient $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\phi$ un isomorphisme. Alors les équations qui définissent $\mathcal{L}_k$ dans $\mathcal{R}$ sont les mêmes que les équations qui définissent $\phi(\mathcal{L}_k)$ dans le repère image $\phi(\mathcal{R})$.*

# Image d'une courbe de niveau



## Proposition

*Soit un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et $f : A \to C$, alors l'image de $\mathcal{L}_k(f)$ par $\phi$ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Exemples :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (ax, by)$. Alors l'image du cercle unité par $\phi$ est l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$.
   1. $\phi(\{x^2 + y^2 = 1\}) = \{x^2 + y^2 = 2\}$.
   2. $\phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a - b) + y(a + b) = 2\}$.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$. Alors l'image du cône standard est le cône d'équation $\{x^2 = yz\}$.

## Proposition

*Soient $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\phi$ un isomorphisme. Alors les équations qui définissent $\mathcal{L}_k$ dans $\mathcal{R}$ sont les mêmes que les équations qui définissent $\phi(\mathcal{L}_k)$ dans le repère image $\phi(\mathcal{R})$.*

# Image d'une courbe de niveau

## Proposition

*Soit un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et $f : A \to C$, alors l'image de $\mathcal{L}_k(f)$ par $\phi$ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Exemples :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (ax, by)$. Alors l'image du cercle unité par $\phi$ est l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$.
   1. $\phi(\{x^2 + y^2 = 1\}) = \{x^2 + y^2 = 2\}$.
   2. $\phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a - b) + y(a + b) = 2\}$.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$. Alors l'image du cône standard est le cône d'équation $\{x^2 = yz\}$.

## Proposition

*Soient $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\phi$ un isomorphisme. Alors les équations qui définissent $\mathcal{L}_k$ dans $\mathcal{R}$ sont les mêmes que les équations qui définissent $\phi(\mathcal{L}_k)$ dans le repère image $\phi(\mathcal{R})$.*

# Image d'une courbe de niveau

## Proposition

*Soit un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et $f : A \to C$, alors l'image de $\mathcal{L}_k(f)$ par $\phi$ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Exemples :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (ax, by)$. Alors l'image du cercle unité par $\phi$ est l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$.
   1. $\phi(\{x^2 + y^2 = 1\}) = \{x^2 + y^2 = 2\}$.
   2. $\phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a - b) + y(a + b) = 2\}$.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$. Alors l'image du cône standard est le cône d'équation $\{x^2 = yz\}$.

## Proposition

*Soient $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\phi$ un isomorphisme. Alors les équations qui définissent $\mathcal{L}_k$ dans $\mathcal{R}$ sont les mêmes que les équations qui définissent $\phi(\mathcal{L}_k)$ dans le repère image $\phi(\mathcal{R})$.*

# Image d'une courbe de niveau



## Proposition

*Soit un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et $f : A \to C$, alors l'image de $\mathcal{L}_k(f)$ par $\phi$ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Exemples :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (ax, by)$. Alors l'image du cercle unité par $\phi$ est l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$.
   1. $\phi(\{x^2 + y^2 = 1\}) = \{x^2 + y^2 = 2\}$.
   2. $\phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a - b) + y(a + b) = 2\}$.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$. Alors l'image du cône standard est le cône d'équation $\{x^2 = yz\}$.

## Proposition

*Soient $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\phi$ un isomorphisme. Alors les équations qui définissent $\mathcal{L}_k$ dans $\mathcal{R}$ sont les mêmes que les équations qui définissent $\phi(\mathcal{L}_k)$ dans le repère image $\phi(\mathcal{R})$.*

# Image d'une courbe de niveau

## Proposition

*Soit un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et $f : A \to C$, alors l'image de $\mathcal{L}_k(f)$ par $\phi$ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Exemples :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (ax, by)$. Alors l'image du cercle unité par $\phi$ est l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$.
   1. $\phi(\{x^2 + y^2 = 1\}) = \{x^2 + y^2 = 2\}$.
   2. $\phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a - b) + y(a + b) = 2\}$.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$. Alors l'image du cône standard est le cône d'équation $\{x^2 = yz\}$.

## Proposition

*Soient $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\phi$ un isomorphisme. Alors les équations qui définissent $\mathcal{L}_k$ dans $\mathcal{R}$ sont les mêmes que les équations qui définissent $\phi(\mathcal{L}_k)$ dans le repère image $\phi(\mathcal{R})$.*

# Image d'une courbe de niveau



## Proposition

*Soit un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et $f : A \to C$, alors l'image de $\mathcal{L}_k(f)$ par $\phi$ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Exemples :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (ax, by)$. Alors l'image du cercle unité par $\phi$ est l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$.
   1. $\phi(\{x^2 + y^2 = 1\}) = \{x^2 + y^2 = 2\}$.
   2. $\phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a - b) + y(a + b) = 2\}$.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$. Alors l'image du cône standard est le cône d'équation $\{x^2 = yz\}$.

## Proposition

*Soient $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\phi$ un isomorphisme. Alors les équations qui définissent $\mathcal{L}_k$ dans $\mathcal{R}$ sont les mêmes que les équations qui définissent $\phi(\mathcal{L}_k)$ dans le repère image $\phi(\mathcal{R})$.*

# Image d'une courbe de niveau



## Proposition

*Soit un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et $f : A \to C$, alors l'image de $\mathcal{L}_k(f)$ par $\phi$ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Exemples :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (ax, by)$. Alors l'image du cercle unité par $\phi$ est l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$.
   1. $\phi(\{x^2 + y^2 = 1\}) = \{x^2 + y^2 = 2\}$.
   2. $\phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a - b) + y(a + b) = 2\}$.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$. Alors l'image du cône standard est le cône d'équation $\{x^2 = yz\}$.

## Proposition

*Soient $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\phi$ un isomorphisme. Alors les équations qui définissent $\mathcal{L}_k$ dans $\mathcal{R}$ sont les mêmes que les équations qui définissent $\phi(\mathcal{L}_k)$ dans le repère image $\phi(\mathcal{R})$.*

# Image d'une courbe de niveau



## Proposition

*Soit un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ et $f : A \to C$, alors l'image de $\mathcal{L}_k(f)$ par $\phi$ est $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$.*

Exemples :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (ax, by)$. Alors l'image du cercle unité par $\phi$ est l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$.
   1. $\phi(\{x^2 + y^2 = 1\}) = \{x^2 + y^2 = 2\}$.
   2. $\phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a - b) + y(a + b) = 2\}$.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$. Alors l'image du cône standard est le cône d'équation $\{x^2 = yz\}$.

## Proposition

*Soient $\mathcal{R}$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\phi$ un isomorphisme. Alors les équations qui définissent $\mathcal{L}_k$ dans $\mathcal{R}$ sont les mêmes que les équations qui définissent $\phi(\mathcal{L}_k)$ dans le repère image $\phi(\mathcal{R})$.*

# Définition d'une ellipse



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $E$ est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $E$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, où les constantes $a \geq b > 0$ sont appelées les rayons.*
2. *Soit $E$ est un cercle, soit il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]0,1[$, appelé excentricité, tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \varepsilon\, \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a > c$ tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F_1, M) + \mathrm{d}(M, F_2) = 2a\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une ellipse existent.
Si $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $a^2 = c^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon)$.

# Définition d'une ellipse



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $E$ est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $E$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, où les constantes $a \geq b > 0$ sont appelées les rayons.*
2. *Soit $E$ est un cercle, soit il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]0, 1[$, appelé excentricité, tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \varepsilon\, \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a > c$ tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F_1, M) + \mathrm{d}(M, F_2) = 2a\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une ellipse existent.
Si $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $a^2 = c^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon)$.

# Définition d'une ellipse



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $E$ est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $E$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, où les constantes $a \geq b > 0$ sont appelées les rayons.*
2. *Soit $E$ est un cercle, soit il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]0,1[$, appelé excentricité, tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \varepsilon\, \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a > c$ tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F_1, M) + \mathrm{d}(M, F_2) = 2a\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une ellipse existent.
Si $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $a^2 = c^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon)$.

# Définition d'une ellipse



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $E$ est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $E$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, où les constantes $a \geq b > 0$ sont appelées les rayons.*
2. *Soit $E$ est un cercle, soit il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]0,1[$, appelé excentricité, tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F,M) = \varepsilon\, \mathrm{d}(M,\mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1,F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a > c$ tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F_1,M) + \mathrm{d}(M,F_2) = 2a\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une ellipse existent.
Si $\mathrm{d}(F,\mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $a^2 = c^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon)$.

# Définition d'une ellipse



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $E$ est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $E$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, où les constantes $a \geq b > 0$ sont appelées les rayons.*
2. *Soit $E$ est un cercle, soit il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]0,1[$, appelé excentricité, tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \varepsilon\, \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a > c$ tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F_1, M) + \mathrm{d}(M, F_2) = 2a\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une ellipse existent.
Si $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $a^2 = c^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon)$.

# Définition d'une ellipse



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $E$ est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $E$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, où les constantes $a \geq b > 0$ sont appelées les rayons.*
2. *Soit $E$ est un cercle, soit il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]0, 1[$, appelé excentricité, tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \varepsilon \, \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a > c$ tels que $E = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F_1, M) + \mathrm{d}(M, F_2) = 2a\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une ellipse existent.
Si $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $a^2 = c^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon)$.

# Propriétés des ellipses



1. Toute ellipse possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'ellipse.
2. Toute ellipse qui n'est pas un cercle admet exactement $2$ axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
3. Les cercles ont une infinité d'axes de symétrie : toute droite qui passe par le centre en est un.
4. L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une ellipse est une ellipse (resp. de même excentricité, resp. de mêmes rayons).

# Propriétés des ellipses



1. Toute ellipse possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'ellipse.
2. Toute ellipse qui n'est pas un cercle admet exactement 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
3. Les cercles ont une infinité d'axes de symétrie : toute droite qui passe par le centre en est un.
4. L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une ellipse est une ellipse (resp. de même excentricité, resp. de mêmes rayons).

# Propriétés des ellipses



1. Toute ellipse possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'ellipse.
2. Toute ellipse qui n'est pas un cercle admet exactement $2$ axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
3. Les cercles ont une infinité d'axes de symétrie : toute droite qui passe par le centre en est un.
4. L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une ellipse est une ellipse (resp. de même excentricité, resp. de mêmes rayons).

# Propriétés des ellipses



1. Toute ellipse possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'ellipse.
2. Toute ellipse qui n'est pas un cercle admet exactement $2$ axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
3. Les cercles ont une infinité d'axes de symétrie : toute droite qui passe par le centre en est un.
4. L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une ellipse est une ellipse (resp. de même excentricité, resp. de mêmes rayons).

# Propriétés des ellipses



1. Toute ellipse possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'ellipse.
2. Toute ellipse qui n'est pas un cercle admet exactement $2$ axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
3. Les cercles ont une infinité d'axes de symétrie : toute droite qui passe par le centre en est un.
4. L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une ellipse est une ellipse (resp. de même excentricité, resp. de mêmes rayons).

# Définition d'une parabole



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $P$ est dit une parabole s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $P$ est défini par une équation cartésienne de la forme $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.*
2. *Il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la directrice, et un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé le foyer, tels que $P = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*

Les deux conditions sont reliées par l'équation $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = p$.
Au vu de la deuxième condition, on dit que l'excentricité d'une parabole est $\varepsilon = 1$.

# Définition d'une parabole



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $P$ est dit une parabole s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $P$ est défini par une équation cartésienne de la forme $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.*
2. *Il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la directrice, et un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé le foyer, tels que $P = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*

Les deux conditions sont reliées par l'équation $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = p$.
Au vu de la deuxième condition, on dit que l'excentricité d'une parabole est $\varepsilon = 1$.

# Définition d'une parabole



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $P$ est dit une parabole s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $P$ est défini par une équation cartésienne de la forme $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.*
2. *Il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la directrice, et un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé le foyer, tels que $P = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*

Les deux conditions sont reliées par l'équation $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = p$.
Au vu de la deuxième condition, on dit que l'excentricité d'une parabole est $\varepsilon = 1$.

# Définition d'une parabole



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $P$ est dit une parabole s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $P$ est défini par une équation cartésienne de la forme $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.*
2. *Il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la directrice, et un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé le foyer, tels que $P = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*

Les deux conditions sont reliées par l'équation $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = p$.

Au vu de la deuxième condition, on dit que l'excentricité d'une parabole est $\varepsilon = 1$.

# Définition d'une parabole



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $P$ est dit une parabole s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $P$ est défini par une équation cartésienne de la forme $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.*
2. *Il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la directrice, et un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé le foyer, tels que $P = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*

Les deux conditions sont reliées par l'équation $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = p$.
Au vu de la deuxième condition, on dit que l'excentricité d'une parabole est $\varepsilon = 1$.

# Propriétés des paraboles



1. Toute parabole admet un unique axe de symétrie. Il est orthogonal à la directrice et passe par le foyer.
2. Les paraboles n'ont pas de centre de symétrie.
3. L'image par un isomorphisme affine d'une parabole est une parabole.

# Propriétés des paraboles



1. Toute parabole admet un unique axe de symétrie. Il est orthogonal à la directrice et passe par le foyer.
2. Les paraboles n'ont pas de centre de symétrie.
3. L'image par un isomorphisme affine d'une parabole est une parabole.

# Propriétés des paraboles



1. Toute parabole admet un unique axe de symétrie. Il est orthogonal à la directrice et passe par le foyer.
2. Les paraboles n'ont pas de centre de symétrie.
3. L'image par un isomorphisme affine d'une parabole est une parabole.

# Propriétés des paraboles



1. Toute parabole admet un unique axe de symétrie. Il est orthogonal à la directrice et passe par le foyer.
2. Les paraboles n'ont pas de centre de symétrie.
3. L'image par un isomorphisme affine d'une parabole est une parabole.

# Définition d'une hyperbole



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $H$ est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $H$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$.*
2. *Il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]1, \infty[$, appelée excentricité, tels que $H = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \varepsilon\, \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a \in ]0, c[$ tels que $H = \left\{M \in \mathcal{E} \,\middle|\, |\mathrm{d}(F_1, M) - \mathrm{d}(M, F_2)| = 2a\right\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une hyperbole existent.
Si $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon})$.

# Définition d'une hyperbole



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $H$ est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $H$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$.*
2. *Il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]1, \infty[$, appelée excentricité, tels que $H = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \varepsilon\, \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a \in ]0, c[$ tels que $H = \left\{M \in \mathcal{E} \,\middle|\, |\mathrm{d}(F_1, M) - \mathrm{d}(M, F_2)| = 2a\right\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une hyperbole existent.
Si $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon})$.

# Définition d'une hyperbole



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $H$ est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $H$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$.*
2. *Il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]1, \infty[$, appelée excentricité, tels que $H = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \varepsilon\, \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a \in ]0, c[$ tels que $H = \left\{M \in \mathcal{E} \,\middle|\, |\mathrm{d}(F_1, M) - \mathrm{d}(M, F_2)| = 2a\right\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une hyperbole existent.
Si $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon})$.

# Définition d'une hyperbole



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $H$ est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $H$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$.*
2. *Il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]1, \infty[$, appelée excentricité, tels que $H = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \varepsilon\, \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a \in ]0, c[$ tels que $H = \left\{M \in \mathcal{E} \,\middle|\, |\mathrm{d}(F_1, M) - \mathrm{d}(M, F_2)| = 2a\right\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une hyperbole existent.
Si $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon})$.

# Définition d'une hyperbole



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $H$ est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $H$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$.*
2. *Il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]1, \infty[$, appelée excentricité, tels que $H = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \varepsilon\, \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a \in ]0, c[$ tels que $H = \left\{M \in \mathcal{E} \,\middle|\, |\mathrm{d}(F_1, M) - \mathrm{d}(M, F_2)| = 2a\right\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une hyperbole existent.
Si $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon})$.

# Définition d'une hyperbole



## Définition-Proposition

*Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Un sous-ensemble $H$ est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *Dans un repère orthonormé, $H$ est défini par une équation cartésienne de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$.*
2. *Il existe une droite $\mathcal{D}$, appelée la la directrice, un point $F \notin \mathcal{D}$, appelé foyer, et $\varepsilon \in ]1, \infty[$, appelée excentricité, tels que $H = \{M \in \mathcal{E} \mid \mathrm{d}(F, M) = \varepsilon\, \mathrm{d}(M, \mathcal{D})\}$.*
3. *Il existe deux points $F_1$ et $F_2$ à distance $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, appelés foyers, et $a \in ]0, c[$ tels que $H = \left\{M \in \mathcal{E} \,\middle|\, |\mathrm{d}(F_1, M) - \mathrm{d}(M, F_2)| = 2a\right\}$.*

D'autres définitions équivalentes d'une hyperbole existent.
Si $\mathrm{d}(F, \mathcal{D}) = h$, alors on a les relations entre les paramètres : $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, et $h = a(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon})$.

# Propriétés des hyperboles



1. Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est $xy = 1$. Autrement dit c'est la graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
3. Toute hyperbole admet $2$ axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
4. Les deux droites d'équations $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ sont appelées les asymptotes de l'hyperbole $\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\}$.
5. L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

# Propriétés des hyperboles



1. Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est $xy = 1$. Autrement dit c'est la graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
3. Toute hyperbole admet $2$ axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
4. Les deux droites d'équations $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ sont appelées les asymptotes de l'hyperbole $\left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$.
5. L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

# Propriétés des hyperboles



1. Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est $xy = 1$. Autrement dit c'est la graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
3. Toute hyperbole admet 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
4. Les deux droites d'équations $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ sont appelées les asymptotes de l'hyperbole $\left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$.
5. L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

# Propriétés des hyperboles



1. Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est $xy = 1$. Autrement dit c'est la graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
3. Toute hyperbole admet $2$ axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
4. Les deux droites d'équations $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ sont appelées les asymptotes de l'hyperbole $\left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$.
5. L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

# Propriétés des hyperboles



1. Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est $xy = 1$. Autrement dit c'est la graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
3. Toute hyperbole admet $2$ axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
4. Les deux droites d'équations $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ sont appelées les asymptotes de l'hyperbole $\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\}$.
5. L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

# Propriétés des hyperboles



1. Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est $xy = 1$. Autrement dit c'est la graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
3. Toute hyperbole admet $2$ axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
4. Les deux droites d'équations $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ sont appelées les asymptotes de l'hyperbole $\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\}$.
5. L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

# Niveaux des formes quadratiques

Étant donnée une forme quadratique $Q$ de rang $r$ sur un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension $n$, il existe une b.o.n dans laquelle $Q(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans cette b.o.n., et $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, r$.
Si on note $Q'$ la restriction de $Q$ sur l'espace $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ engendré par les $r$ premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\overrightarrow{\mathcal{F}} = (\operatorname{Ker} Q)^{\perp}$ ;
- $Q'$ est non dégénéré sur $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ ;
- La courbe de niveau $\mathcal{L}_k(Q)$ est un cylindre de direction $\operatorname{Ker} Q$ et de base $\mathcal{L}_k(Q') \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Donc pour étudier les courbes de niveaux des formes quadratiques, il suffit de connaître les courbes de niveaux des formes quadratiques **non dégénérées**.

# Niveaux des formes quadratiques



Étant donnée une forme quadratique $Q$ de rang $r$ sur un espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension $n$, il existe une b.o.n dans laquelle $Q(\vec{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette b.o.n., et $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, r$.
Si on note $Q'$ la restriction de $Q$ sur l'espace $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par les $r$ premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\vec{\mathcal{F}} = (\text{Ker } Q)^{\perp}$ ;
- $Q'$ est non dégénéré sur $\vec{\mathcal{F}}$ ;
- La courbe de niveau $\mathcal{L}_k(Q)$ est un cylindre de direction Ker $Q$ et de base $\mathcal{L}_k(Q') \subset \vec{\mathcal{F}}$.

Donc pour étudier les courbes de niveaux des formes quadratiques, il suffit de connaître les courbes de niveaux des formes quadratiques **non dégénérées**.

# Niveaux des formes quadratiques



Étant donnée une forme quadratique $Q$ de rang $r$ sur un espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension $n$, il existe une b.o.n dans laquelle $Q(\vec{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette b.o.n., et $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, r$.
Si on note $Q'$ la restriction de $Q$ sur l'espace $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par les $r$ premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\vec{\mathcal{F}} = (\text{Ker } Q)^{\perp}$ ;
- $Q'$ est non dégénéré sur $\vec{\mathcal{F}}$ ;
- La courbe de niveau $\mathcal{L}_k(Q)$ est un cylindre de direction Ker $Q$ et de base $\mathcal{L}_k(Q') \subset \vec{\mathcal{F}}$.

Donc pour étudier les courbes de niveaux des formes quadratiques, il suffit de connaître les courbes de niveaux des formes quadratiques **non dégénérées**.

# Niveaux des formes quadratiques

Étant donnée une forme quadratique $Q$ de rang $r$ sur un espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension $n$, il existe une b.o.n dans laquelle $Q(\vec{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette b.o.n., et $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, r$.
Si on note $Q'$ la restriction de $Q$ sur l'espace $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par les $r$ premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\vec{\mathcal{F}} = (\text{Ker } Q)^{\perp}$ ;
- $Q'$ est non dégénéré sur $\vec{\mathcal{F}}$ ;
- La courbe de niveau $\mathcal{L}_k(Q)$ est un cylindre de direction Ker $Q$ et de base $\mathcal{L}_k(Q') \subset \vec{\mathcal{F}}$.

Donc pour étudier les courbes de niveaux des formes quadratiques, il suffit de connaître les courbes de niveaux des formes quadratiques **non dégénérées**.

# Niveaux des formes quadratiques



Étant donnée une forme quadratique $Q$ de rang $r$ sur un espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension $n$, il existe une b.o.n dans laquelle $Q(\vec{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette b.o.n., et $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, r$.
Si on note $Q'$ la restriction de $Q$ sur l'espace $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par les $r$ premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\vec{\mathcal{F}} = (\mathrm{Ker}\, Q)^{\perp}$ ;
- $Q'$ est non dégénéré sur $\vec{\mathcal{F}}$ ;
- La courbe de niveau $\mathcal{L}_k(Q)$ est un cylindre de direction $\mathrm{Ker}\, Q$ et de base $\mathcal{L}_k(Q') \subset \vec{\mathcal{F}}$.

Donc pour étudier les courbes de niveaux des formes quadratiques, il suffit de connaître les courbes de niveaux des formes quadratiques **non dégénérées**.

# Niveaux des formes quadratiques



Étant donnée une forme quadratique $Q$ de rang $r$ sur un espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension $n$, il existe une b.o.n dans laquelle $Q(\vec{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette b.o.n., et $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, r$.
Si on note $Q'$ la restriction de $Q$ sur l'espace $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par les $r$ premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\vec{\mathcal{F}} = (\text{Ker } Q)^{\perp}$ ;
- $Q'$ est non dégénéré sur $\vec{\mathcal{F}}$ ;
- La courbe de niveau $\mathcal{L}_k(Q)$ est un cylindre de direction Ker $Q$ et de base $\mathcal{L}_k(Q') \subset \vec{\mathcal{F}}$.

Donc pour étudier les courbes de niveaux des formes quadratiques, il suffit de connaître les courbes de niveaux des formes quadratiques **non dégénérées**.

# Niveaux des formes quadratiques



Étant donnée une forme quadratique $Q$ de rang $r$ sur un espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension $n$, il existe une b.o.n dans laquelle $Q(\vec{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette b.o.n., et $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, r$.
Si on note $Q'$ la restriction de $Q$ sur l'espace $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par les $r$ premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\vec{\mathcal{F}} = (\text{Ker}\, Q)^{\perp}$ ;
- $Q'$ est non dégénéré sur $\vec{\mathcal{F}}$ ;
- La courbe de niveau $\mathcal{L}_k(Q)$ est un cylindre de direction $\text{Ker}\, Q$ et de base $\mathcal{L}_k(Q') \subset \vec{\mathcal{F}}$.

Donc pour étudier les courbes de niveaux des formes quadratiques, il suffit de connaître les courbes de niveaux des formes quadratiques **non dégénérées**.

# Niveaux des formes quadratiques



Étant donnée une forme quadratique $Q$ de rang $r$ sur un espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension $n$, il existe une b.o.n dans laquelle $Q(\vec{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette b.o.n., et $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, r$.
Si on note $Q'$ la restriction de $Q$ sur l'espace $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par les $r$ premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\vec{\mathcal{F}} = (\mathrm{Ker}\, Q)^{\perp}$ ;
- $Q'$ est non dégénéré sur $\vec{\mathcal{F}}$ ;
- La courbe de niveau $\mathcal{L}_k(Q)$ est un cylindre de direction $\mathrm{Ker}\, Q$ et de base $\mathcal{L}_k(Q') \subset \vec{\mathcal{F}}$.

Donc pour étudier les courbes de niveaux des formes quadratiques, il suffit de connaître les courbes de niveaux des formes quadratiques **non dégénérées**.

# Niveaux des formes quadratiques



Étant donnée une forme quadratique $Q$ de rang $r$ sur un espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension $n$, il existe une b.o.n dans laquelle $Q(\vec{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette b.o.n., et $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, r$.
Si on note $Q'$ la restriction de $Q$ sur l'espace $\vec{\mathcal{F}}$ engendré par les $r$ premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\vec{\mathcal{F}} = (\mathrm{Ker}\, Q)^{\perp}$ ;
- $Q'$ est non dégénéré sur $\vec{\mathcal{F}}$ ;
- La courbe de niveau $\mathcal{L}_k(Q)$ est un cylindre de direction $\mathrm{Ker}\, Q$ et de base $\mathcal{L}_k(Q') \subset \vec{\mathcal{F}}$.

Donc pour étudier les courbes de niveaux des formes quadratiques, il suffit de connaître les courbes de niveaux des formes quadratiques **non dégénérées**.

# En dimension 1



- Toute forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$, et donc les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $\text{signe}(a) \neq \text{signe}(k)$ : vides,
  - *si* $k = 0$ : le point $\{0\}$,
  - *si* $\text{signe}(a) = \text{signe}(k)$ : l'ensemble de deux points $\{\pm\sqrt{k/a}\}$.
- La seule forme quadratique dégénérée sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 0$ dont les lignes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $k \neq 0$ : vides,
  - *si* $k = 0$ : $\mathbb{R}$ qui est un cylindre de base $0$ et de direction $\mathbb{R}$.

# En dimension 1



- Toute forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$, et donc les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $\text{signe}(a) \neq \text{signe}(k)$ : vides,
  - *si* $k = 0$ : le point $\{0\}$,
  - *si* $\text{signe}(a) = \text{signe}(k)$ : l'ensemble de deux points $\{\pm\sqrt{k/a}\}$.
- La seule forme quadratique dégénérée sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 0$ dont les lignes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $k \neq 0$ : vides,
  - *si* $k = 0$ : $\mathbb{R}$ qui est un cylindre de base 0 et de direction $\mathbb{R}$.

# En dimension 1



- Toute forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$, et donc les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $\text{signe}(a) \neq \text{signe}(k)$ *:* vides,
  - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
  - *si* $\text{signe}(a) = \text{signe}(k)$ *:* l'ensemble de deux points $\{\pm\sqrt{k/a}\}$.
- La seule forme quadratique dégénérée sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 0$ dont les lignes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $k \neq 0$ *:* vides,
  - *si* $k = 0$ *:* $\mathbb{R}$ qui est un cylindre de base $0$ et de direction $\mathbb{R}$.

# En dimension 1



- Toute forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$, et donc les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $\text{signe}(a) \neq \text{signe}(k)$ *:* vides,
  - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
  - *si* $\text{signe}(a) = \text{signe}(k)$ *:* l'ensemble de deux points $\{\pm\sqrt{k/a}\}$.
- La seule forme quadratique dégénérée sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 0$ dont les lignes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $k \neq 0$ *:* vides,
  - *si* $k = 0$ *:* $\mathbb{R}$ qui est un cylindre de base $0$ et de direction $\mathbb{R}$.

# En dimension 1



- Toute forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$, et donc les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $\text{signe}(a) \neq \text{signe}(k)$ *:* vides,
  - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
  - *si* $\text{signe}(a) = \text{signe}(k)$ *:* l'ensemble de deux points $\{\pm\sqrt{k/a}\}$.
- La seule forme quadratique dégénérée sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 0$ dont les lignes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $k \neq 0$ *:* vides,
  - *si* $k = 0$ *:* $\mathbb{R}$ qui est un cylindre de base $0$ et de direction $\mathbb{R}$.

# En dimension 1



- Toute forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$, et donc les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $\text{signe}(a) \neq \text{signe}(k)$ : vides,
  - *si* $k = 0$ : le point $\{0\}$,
  - *si* $\text{signe}(a) = \text{signe}(k)$ : l'ensemble de deux points $\{\pm\sqrt{k/a}\}$.
- La seule forme quadratique dégénérée sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 0$ dont les lignes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $k \neq 0$ : vides,
  - *si* $k = 0$ : $\mathbb{R}$ qui est un cylindre de base $0$ et de direction $\mathbb{R}$.

# En dimension 1



- Toute forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$, et donc les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $\text{signe}(a) \neq \text{signe}(k)$ *:* vides,
  - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
  - *si* $\text{signe}(a) = \text{signe}(k)$ *:* l'ensemble de deux points $\{\pm\sqrt{k/a}\}$.
- La seule forme quadratique dégénérée sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 0$ dont les lignes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $k \neq 0$ *:* vides,
  - *si* $k = 0$ *:* $\mathbb{R}$ qui est un cylindre de base $0$ et de direction $\mathbb{R}$.

# En dimension 1



- Toute forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$, et donc les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $\text{signe}(a) \neq \text{signe}(k)$ *:* vides,
  - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
  - *si* $\text{signe}(a) = \text{signe}(k)$ *:* l'ensemble de deux points $\{\pm\sqrt{k/a}\}$.
- La seule forme quadratique dégénérée sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 0$ dont les lignes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - *si* $k \neq 0$ *:* vides,
  - *si* $k = 0$ *:* $\mathbb{R}$ qui est un cylindre de base $0$ et de direction $\mathbb{R}$.

# En dimension 2



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
  - Si signe$(\lambda_1)$ = signe$(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - vide,
    - le point $\{0\}$,
    - une ellipse d'équation $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
  - Si signe$(\lambda_1) \neq$ signe$(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
    - une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 2

- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
  - Si signe$(\lambda_1)$ = signe$(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* signe$(\lambda_i) \neq$ signe$(k)$ : vide,
    - *si* $k = 0$ : le point $\{0\}$,
    - *si* signe$(\lambda_i)$ = signe$(k)$ : une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
  - Si signe$(\lambda_1) \neq$ signe$(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k = 0$ : deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
    - *si* $k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

    *Les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{L}_k$ sont les deux droites de $\mathcal{L}_0$.*
- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 2

- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) = \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) \neq \text{signe}(k)$ : vide,
    - *si* $k = 0$ : le point $\{0\}$,
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) = \text{signe}(k)$ : une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k = 0$ : deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
    - *si* $k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

    *Les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{L}_k$ sont les deux droites de $\mathcal{L}_0$.*
- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 2



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) = \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) \neq \text{signe}(k)$ *:* vide,
    - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) = \text{signe}(k)$ *:* une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k = 0$ *:* deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
    - *si* $k \neq 0$ *:* une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

    *Les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{L}_k$ sont les deux droites de $\mathcal{L}_0$.*
- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 2



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) = \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) \neq \text{signe}(k)$ *:* vide,
    - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) = \text{signe}(k)$ *:* une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k = 0$ *:* deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
    - *si* $k \neq 0$ *:* une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

    *Les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{L}_k$ sont les deux droites de $\mathcal{L}_0$.*
- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 2



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) = \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) \neq \text{signe}(k)$ *:* vide,
    - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) = \text{signe}(k)$ *:* une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k = 0$ *:* deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
    - *si* $k \neq 0$ *:* une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

    *Les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{L}_k$ sont les deux droites de $\mathcal{L}_0$.*
- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 2

- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) = \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) \neq \text{signe}(k)$ *:* vide,
    - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) = \text{signe}(k)$ *:* une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k = 0$ *:* deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
    - *si* $k \neq 0$ *:* une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

    *Les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{L}_k$ sont les deux droites de $\mathcal{L}_0$.*
- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 2



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
    - Si $\text{signe}(\lambda_1) = \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
        - *si* $\text{signe}(\lambda_i) \neq \text{signe}(k)$ *:* vide,
        - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
        - *si* $\text{signe}(\lambda_i) = \text{signe}(k)$ *:* une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
    - Si $\text{signe}(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
        - *si* $k = 0$ *:* deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
        - *si* $k \neq 0$ *:* une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

    *Les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{L}_k$ sont les deux droites de $\mathcal{L}_0$.*

- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 2

- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) = \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) \neq \text{signe}(k)$ *:* vide,
    - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) = \text{signe}(k)$ *:* une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k = 0$ *:* deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
    - *si* $k \neq 0$ *:* une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

  *Les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{L}_k$ sont les deux droites de $\mathcal{L}_0$.*

- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 2



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) = \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) \neq \text{signe}(k)$ *:* vide,
    - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) = \text{signe}(k)$ *:* une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k = 0$ *:* deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
    - *si* $k \neq 0$ *:* une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

  *Les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{L}_k$ sont les deux droites de $\mathcal{L}_0$.*

- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 2



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) = \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) \neq \text{signe}(k)$ *:* vide,
    - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) = \text{signe}(k)$ *:* une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k = 0$ *:* deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
    - *si* $k \neq 0$ *:* une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

    *Les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{L}_k$ sont les deux droites de $\mathcal{L}_0$.*
- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 2



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) = \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) \neq \text{signe}(k)$ *:* vide,
    - *si* $k = 0$ *:* le point $\{0\}$,
    - *si* $\text{signe}(\lambda_i) = \text{signe}(k)$ *:* une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{k/\lambda_2}$.
  - Si $\text{signe}(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k = 0$ *:* deux droites de pentes $\pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$,
    - *si* $k \neq 0$ *:* une hyperbole dont l'équation standard dans le cas $k > 0$ est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ et $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$.

    *Les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{L}_k$ sont les deux droites de $\mathcal{L}_0$.*
- Les formes quadratiques dégénérées de $\mathbb{R}^2$ non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y) \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \neq 0$. Et donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont vides, une ou deux droites selon que $k/\lambda < 0$, $k = 0$ ou $k/\lambda > 0$.

# En dimension 3



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont

# En dimension 3

- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$.
  Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :

# En dimension 3



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

# En dimension 3



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k < 0$ : vide,
    - *si* $k = 0$ : le point $\{0\}$,
    - *si* $k > 0$ : un ellipsoïde d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$, $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ et $c = \sqrt{k/\lambda_3}$.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si* $k = 0$ : un cône elliptique de base l'ellipse d'équations $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$ et $z = 1$,
    - *si* $k > 0$ : un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan $z = h$ est l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$.
    - *si* $k < 0$ : un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan $z = h$ est vide si $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$ et est une l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ si $|h| \geq \sqrt{k/\lambda_3}$.

# En dimension 3

- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k < 0$ :* vide,
    - *si $k = 0$ :* le point $\{0\}$,
    - *si $k > 0$ :* un ellipsoïde d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$, $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ et $c = \sqrt{k/\lambda_3}$.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k = 0$ :* un cône elliptique de base l'ellipse d'équations $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$ et $z = 1$,
    - *si $k > 0$ :* un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan $z = h$ est l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$.
    - *si $k < 0$ :* un hyperboloïde à deux nappes

# En dimension 3



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k < 0$ :* vide,
    - *si $k = 0$ :* le point $\{0\}$,
    - *si $k > 0$ :* un ellipsoïde d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$, $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ et $c = \sqrt{k/\lambda_3}$.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k = 0$ :* un cône elliptique de base l'ellipse d'équations $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$ et $z = 1$,
    - *si $k > 0$ :* un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan $z = h$ est l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$.
    - *si $k < 0$ :* un hyperboloïde à deux nappes

# En dimension 3



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k < 0$ :* vide,
    - *si $k = 0$ :* le point $\{0\}$,
    - *si $k > 0$ :* un ellipsoïde d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$, $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ et $c = \sqrt{k/\lambda_3}$.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k = 0$ :* un cône elliptique de base l'ellipse d'équations $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$ et $z = 1$,
    - *si $k > 0$ :* un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan $z = h$ est l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$.
    - *si $k < 0$ :* un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan $z = h$ est vide si $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$ et est une l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ si $|h| \geq \sqrt{k/\lambda_3}$.

# En dimension 3

- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k < 0$ :* vide,
    - *si $k = 0$ :* le point $\{0\}$,
    - *si $k > 0$ :* un ellipsoïde d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$, $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ et $c = \sqrt{k/\lambda_3}$.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k = 0$ :* un cône elliptique de base l'ellipse d'équations $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$ et $z = 1$,
    - *si $k > 0$ :* un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan $z = h$ est l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$.
    - *si $k < 0$ :* un hyperboloïde à deux nappes

# En dimension 3



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k < 0$ :* vide,
    - *si $k = 0$ :* le point $\{0\}$,
    - *si $k > 0$ :* un ellipsoïde d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$, $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ et $c = \sqrt{k/\lambda_3}$.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k = 0$ :* un cône elliptique de base l'ellipse d'équations $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$ et $z = 1$,
    - *si $k > 0$ :* un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan $z = h$ est l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$.
    - *si $k < 0$ :* un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan $z = h$ est vide si $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$ et est une l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ si $|h| \geq \sqrt{k/\lambda_3}$.

# En dimension 3



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x,y,z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1,2,3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k < 0$ :* vide,
    - *si $k = 0$ :* le point $\{0\}$,
    - *si $k > 0$ :* un ellipsoïde d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$, $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ et $c = \sqrt{k/\lambda_3}$.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k = 0$ :* un cône elliptique de base l'ellipse d'équations $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$ et $z = 1$,
    - *si $k > 0$ :* un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan $z = h$ est l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$.
    - *si $k < 0$ :* un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan $z = h$ est vide si $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$ et est une l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ si $|h| \geq \sqrt{k/\lambda_3}$.

# En dimension 3

- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k < 0$ :* vide,
    - *si $k = 0$ :* le point $\{0\}$,
    - *si $k > 0$ :* un ellipsoïde d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$, $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ et $c = \sqrt{k/\lambda_3}$.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k = 0$ :* un cône elliptique de base l'ellipse d'équations $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$ et $z = 1$,
    - *si $k > 0$ :* un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan $z = h$ est l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$.
    - *si $k < 0$ :* un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan $z = h$ est vide si $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$ et est une l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ si $|h| \geq \sqrt{k/\lambda_3}$.

# En dimension 3



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k < 0$ :* vide,
    - *si $k = 0$ :* le point $\{0\}$,
    - *si $k > 0$ :* un ellipsoïde d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$, $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ et $c = \sqrt{k/\lambda_3}$.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k = 0$ :* un cône elliptique de base l'ellipse d'équations $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$ et $z = 1$,
    - *si $k > 0$ :* un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan $z = h$ est l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$.
    - *si $k < 0$ :* un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan $z = h$ est vide si $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$ et est une l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ si $|h| \geq \sqrt{k/\lambda_3}$.

# En dimension 3



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k < 0$ :* vide,
    - *si $k = 0$ :* le point $\{0\}$,
    - *si $k > 0$ :* un ellipsoïde d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$, $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ et $c = \sqrt{k/\lambda_3}$.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k = 0$ :* un cône elliptique de base l'ellipse d'équations $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$ et $z = 1$,
    - *si $k > 0$ :* un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan $z = h$ est l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$.
    - *si $k < 0$ :* un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan $z = h$ est vide si $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$ et est une l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ si $|h| \geq \sqrt{k/\lambda_3}$.

# En dimension 3



- Les formes quadratiques non dégénérées de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $(x, y, z) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathcal{L}_k(Q) = \mathcal{L}_{-k}(-Q)$ on peut restreindre notre étude au cas de $2$ ou $3$ valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  - Si $\lambda_i > 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k < 0$ :* vide,
    - *si $k = 0$ :* le point $\{0\}$,
    - *si $k > 0$ :* un ellipsoïde d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a = \sqrt{k/\lambda_1}$, $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ et $c = \sqrt{k/\lambda_3}$.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$ les courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont :
    - *si $k = 0$ :* un cône elliptique de base l'ellipse d'équations $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$ et $z = 1$,
    - *si $k > 0$ :* un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan $z = h$ est l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$.
    - *si $k < 0$ :* un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan $z = h$ est vide si $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$ et est une l'ellipse $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ si $|h| \geq \sqrt{k/\lambda_3}$.

# Fonctions polynomiales



## Définition-Proposition

*On dit que f est une fonction polynomiale de degré n sur l'espace affine $\mathcal{E}$ si dans un repère (dans tout repère) la valeur de $f(x_1, \ldots, x_n)$ est un polynôme de degré n en les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Dans la suite de ce cours on va étudier les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré $2$.
Toute fonction polynomiale de degré $2$ s'écrit dans un repère $\mathcal{R}$ sous la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + C_{\mathcal{R}}$, où $Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ est la forme quadratique correspondante à la partie homogène de degré $2$, $L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ la forme linéaire correspondante à la partie homogène de degré $1$ et $C_{\mathcal{R}}$ est la partie constante de degré $0$.

## Proposition

*La partie quadratiques $Q_{\mathcal{R}}$ est invariante par translation, ses valeurs propres sont invariant par les isométrie et sa signature est invariante par toute transformation affine.*

# Fonctions polynomiales



## Définition-Proposition

*On dit que f est une fonction polynomiale de degré n sur l'espace affine $\mathcal{E}$ si dans un repère (dans tout repère) la valeur de $f(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme de degré n en les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$.*

Dans la suite de ce cours on va étudier les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré $2$.

Toute fonction polynomiale de degré $2$ s'écrit dans un repère $\mathcal{R}$ sous la forme $f(x_1, \dots, x_n) = Q_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n) + L_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n) + C_{\mathcal{R}}$, où $Q_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n)$ est la forme quadratique correspondante à la partie homogène de degré $2$, $L_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n)$ la forme linéaire correspondante à la partie homogène de degré $1$ et $C_{\mathcal{R}}$ est la partie constante de degré $0$.

## Proposition

*La partie quadratiques $Q_{\mathcal{R}}$ est invariante par translation, ses valeurs propres sont invariant par les isométrie et sa signature est invariante par toute transformation affine.*

# Fonctions polynomiales



## Définition-Proposition

*On dit que f est une* **fonction polynomiale** *de degré n sur l'espace affine $\mathcal{E}$ si dans un repère (dans tout repère) la valeur de $f(x_1, \ldots, x_n)$ est un polynôme de degré n en les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Dans la suite de ce cours on va étudier les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré $2$.

Toute fonction polynomiale de degré $2$ s'écrit dans un repère $\mathcal{R}$ sous la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + C_{\mathcal{R}}$, où $Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ est la forme quadratique correspondante à la partie homogène de degré $2$, $L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ la forme linéaire correspondante à la partie homogène de degré $1$ et $C_{\mathcal{R}}$ est la partie constante de degré $0$.

## Proposition

*La partie quadratiques $Q_{\mathcal{R}}$ est invariante par translation, ses valeurs propres sont invariant par les isométrie et sa signature est invariante par toute transformation affine.*

# Fonctions polynomiales



## Définition-Proposition

*On dit que f est une **fonction polynomiale** de degré n sur l'espace affine $\mathcal{E}$ si dans un repère (dans tout repère) la valeur de $f(x_1, \ldots, x_n)$ est un polynôme de degré n en les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Dans la suite de ce cours on va étudier les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré $2$.

Toute fonction polynomiale de degré $2$ s'écrit dans un repère $\mathcal{R}$ sous la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + C_{\mathcal{R}}$, où $Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ est la forme quadratique correspondante à la partie homogène de degré $2$, $L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ la forme linéaire correspondante à la partie homogène de degré $1$ et $C_{\mathcal{R}}$ est la partie constante de degré $0$.

## Proposition

*La partie quadratiques $Q_{\mathcal{R}}$ est invariante par translation, ses valeurs propres sont invariant par les isométrie et sa signature est invariante par toute transformation affine.*

# Fonctions polynomiales



## Définition-Proposition

*On dit que $f$ est une fonction polynomiale de degré $n$ sur l'espace affine $\mathcal{E}$ si dans un repère (dans tout repère) la valeur de $f(x_1, \ldots, x_n)$ est un polynôme de degré $n$ en les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Dans la suite de ce cours on va étudier les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré $2$.

Toute fonction polynomiale de degré $2$ s'écrit dans un repère $\mathcal{R}$ sous la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + C_{\mathcal{R}}$, où $Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ est la forme quadratique correspondante à la partie homogène de degré $2$, $L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ la forme linéaire correspondante à la partie homogène de degré $1$ et $C_{\mathcal{R}}$ est la partie constante de degré $0$.

## Proposition

*La partie quadratiques $Q_{\mathcal{R}}$ est invariante par translation, ses valeurs propres sont invariant par les isométrie et sa signature est invariante par toute transformation affine.*

# Fonctions polynomiales



## Définition-Proposition

*On dit que f est une fonction polynomiale de degré n sur l'espace affine $\mathcal{E}$ si dans un repère (dans tout repère) la valeur de $f(x_1, \ldots, x_n)$ est un polynôme de degré n en les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Dans la suite de ce cours on va étudier les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré $2$.
Toute fonction polynomiale de degré $2$ s'écrit dans un repère $\mathcal{R}$ sous la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + C_{\mathcal{R}}$, où $Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ est la forme quadratique correspondante à la partie homogène de degré $2$, $L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ la forme linéaire correspondante à la partie homogène de degré $1$ et $C_{\mathcal{R}}$ est la partie constante de degré $0$.

## Proposition

*La partie quadratiques $Q_{\mathcal{R}}$ est invariante par translation, ses valeurs propres sont invariant par les isométrie et sa signature est invariante par toute transformation affine.*

# Fonctions polynomiales



## Définition-Proposition

*On dit que $f$ est une fonction polynomiale de degré $n$ sur l'espace affine $\mathcal{E}$ si dans un repère (dans tout repère) la valeur de $f(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme de degré $n$ en les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$.*

Dans la suite de ce cours on va étudier les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré $2$.
Toute fonction polynomiale de degré $2$ s'écrit dans un repère $\mathcal{R}$ sous la forme $f(x_1, \dots, x_n) = Q_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n) + L_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n) + C_{\mathcal{R}}$, où $Q_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n)$ est la forme quadratique correspondante à la partie homogène de degré $2$, $L_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n)$ la forme linéaire correspondante à la partie homogène de degré $1$ et $C_{\mathcal{R}}$ est la partie constante de degré $0$.

## Proposition

*La partie quadratiques $Q_{\mathcal{R}}$ est invariante par translation, ses valeurs propres sont invariant par les isométrie et sa signature est invariante par toute transformation affine.*

# Fonctions polynomiales



## Définition-Proposition

*On dit que $f$ est une fonction polynomiale de degré $n$ sur l'espace affine $\mathcal{E}$ si dans un repère (dans tout repère) la valeur de $f(x_1, \ldots, x_n)$ est un polynôme de degré $n$ en les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Dans la suite de ce cours on va étudier les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré $2$.
Toute fonction polynomiale de degré $2$ s'écrit dans un repère $\mathcal{R}$ sous la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + C_{\mathcal{R}}$, où $Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ est la forme quadratique correspondante à la partie homogène de degré $2$, $L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ la forme linéaire correspondante à la partie homogène de degré $1$ et $C_{\mathcal{R}}$ est la partie constante de degré $0$.

## Proposition

*La partie quadratiques $Q_{\mathcal{R}}$ est invariante par translation, ses valeurs propres sont invariant par les isométrie et sa signature est invariante par toute transformation affine.*

# Fonctions polynomiales



## Définition-Proposition

*On dit que $f$ est une fonction polynomiale de degré $n$ sur l'espace affine $\mathcal{E}$ si dans un repère (dans tout repère) la valeur de $f(x_1, \ldots, x_n)$ est un polynôme de degré $n$ en les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Dans la suite de ce cours on va étudier les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré $2$.
Toute fonction polynomiale de degré $2$ s'écrit dans un repère $\mathcal{R}$ sous la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n) + C_{\mathcal{R}}$, où $Q_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ est la forme quadratique correspondante à la partie homogène de degré $2$, $L_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ la forme linéaire correspondante à la partie homogène de degré $1$ et $C_{\mathcal{R}}$ est la partie constante de degré $0$.

## Proposition

*La partie quadratiques $Q_{\mathcal{R}}$ est invariante par translation, ses valeurs propres sont invariant par les isométrie et sa signature est invariante par toute transformation affine.*

# Pourquoi les polynômes de degré 2 ?



1. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
2. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
3. On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
4. Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
5. On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Pour toutes ces raisons, il est naturel d'étudier en toute généralité les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré 2 d'un espace affine (euclidien) $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

# Pourquoi les polynômes de degré 2 ?



1. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
2. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
3. On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
4. Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
5. On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Pour toutes ces raisons, il est naturel d'étudier en toute généralité les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré 2 d'un espace affine (euclidien) $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

# Pourquoi les polynômes de degré 2 ?



1. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
2. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
3. On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
4. Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
5. On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Pour toutes ces raisons, il est naturel d'étudier en toute généralité les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré 2 d'un espace affine (euclidien) $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

# Pourquoi les polynômes de degré 2 ?



1. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
2. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
3. On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
4. Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
5. On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Pour toutes ces raisons, il est naturel d'étudier en toute généralité les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré 2 d'un espace affine (euclidien) $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

# Pourquoi les polynômes de degré 2 ?



1. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
2. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
3. On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
4. Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
5. On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Pour toutes ces raisons, il est naturel d'étudier en toute généralité les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré 2 d'un espace affine (euclidien) $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

# Pourquoi les polynômes de degré 2 ?



1. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
2. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
3. On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
4. Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
5. On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Pour toutes ces raisons, il est naturel d'étudier en toute généralité les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré 2 d'un espace affine (euclidien) $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

# Pourquoi les polynômes de degré 2 ?



1. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
2. Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
3. On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
4. Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
5. On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Pour toutes ces raisons, il est naturel d'étudier en toute généralité les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré 2 d'un espace affine (euclidien) $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

# Forme standard des polynômes de degré 2



## Proposition

*Soit $f$ est une fonction polynomiale de degré $2$ sur l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension $n$, alors il existe une b.o.n. dans laquelle soit*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + \mu$$

*avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, r$, soit*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + \mu x_{r+1}$$

*avec $\mu \neq 0$ et $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, r$.*

Dans le premier cas on se retrouve dans le cas déjà discuté des formes quadratiques.
Dans le deuxième cas, en notant $\mathcal{F} = \{(x_1, \ldots, x_{r+1}, 0, \ldots, 0)\}$ et $\mathcal{F}^\perp = \{(0, \ldots, 0, x_{r+2}, \ldots, x_n)\}$, vu que $\mathcal{L}_k(f)$ est un cylindre de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}^\perp}$ et de base $\mathcal{L}_k(f|_\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, on peut se restreindre à l'étude du cas où $n = r + 1$.

# Forme standard des polynômes de degré 2



## Proposition

*Soit $f$ est une fonction polynomiale de degré $2$ sur l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension $n$, alors il existe une b.o.n. dans laquelle soit*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + \mu$$

*avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, \dots, r$, soit*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + \mu x_{r+1}$$

*avec $\mu \neq 0$ et $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, \dots, r$.*

Dans le premier cas on se retrouve dans le cas déjà discuté des formes quadratiques.

Dans le deuxième cas, en notant $\mathcal{F} = \{(x_1, \dots, x_{r+1}, 0, \dots, 0)\}$ et $\mathcal{F}^\perp = \{(0, \dots, 0, x_{r+2}, \dots, x_n)\}$, vu que $\mathcal{L}_k(f)$ est un cylindre de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}^\perp}$ et de base $\mathcal{L}_k(f|_{\mathcal{F}}) \subset \mathcal{F}$, on peut se restreindre à l'étude du cas où $n = r + 1$.

# Forme standard des polynômes de degré 2



### Proposition

*Soit $f$ est une fonction polynomiale de degré $2$ sur l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension $n$, alors il existe une b.o.n. dans laquelle soit*

$$f(x_1,\dots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\dots+\lambda_rx_r^2+\mu$$

*avec $\lambda_i\neq 0$ pour $i=1,\dots,r$, soit*

$$f(x_1,\dots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\dots+\lambda_rx_r^2+\mu x_{r+1}$$

*avec $\mu\neq 0$ et $\lambda_i\neq 0$ pour $i=1,\dots,r$.*

Dans le premier cas on se retrouve dans le cas déjà discuté des formes quadratiques.

Dans le deuxième cas, en notant $\mathcal{F}=\{(x_1,\dots,x_{r+1},0,\dots,0)\}$ et $\mathcal{F}^\perp=\{(0,\dots,0,x_{r+2},\dots,x_n)\}$, vu que $\mathcal{L}_k(f)$ est un cylindre de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}^\perp}$ et de base $\mathcal{L}_k(f|_{\mathcal{F}})\subset\mathcal{F}$, on peut se restreindre à l'étude du cas où $n=r+1$.

# Forme standard des polynômes de degré 2



## Proposition

*Soit $f$ est une fonction polynomiale de degré $2$ sur l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension $n$, alors il existe une b.o.n. dans laquelle soit*

$$f(x_1,\dots,x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + \mu$$

*avec $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1,\dots,r$, soit*

$$f(x_1,\dots,x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + \mu x_{r+1}$$

*avec $\mu \neq 0$ et $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1,\dots,r$.*

Dans le premier cas on se retrouve dans le cas déjà discuté des formes quadratiques.
Dans le deuxième cas, en notant $\mathcal{F} = \{(x_1,\dots,x_{r+1},0,\dots,0)\}$ et $\mathcal{F}^\perp = \{(0,\dots,0,x_{r+2},\dots,x_n)\}$, vu que $\mathcal{L}_k(f)$ est un cylindre de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}^\perp}$ et de base $\mathcal{L}_k(f|_\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, on peut se restreindre à l'étude du cas où $n = r+1$.

# polynômes de degré 2, en dimension 1



En dimension $1$ il n'y a pas de polynômes de degré $2$ qui ne soient pas dans une base de la forme déjà étudiée $AX^2 - C$.

Calcul avec $a \neq 0$ :

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = AX^2 - C,$$

avec $A = a$, $X = x + \frac{b}{2a}$ et $C = \frac{b^2-4ac}{4a}$.

# polynômes de degré 2, en dimension 1



En dimension $1$ il n'y a pas de polynômes de degré $2$ qui ne soient pas dans une base de la forme déjà étudiée $AX^2 - C$.
Calcul avec $a \neq 0$ :

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = AX^2 - C,$$

avec $A = a$, $X = x + \frac{b}{2a}$ et $C = \frac{b^2-4ac}{4a}$.

# polynômes de degré 2, en dimension 2



En dimension $2$ les polynômes qui manquent dans notre étude s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $ax^2 + by$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont des paraboles $X^2 = 2pY$, avec $X = x$, $p = -\frac{b}{2a}$ et $Y = y - \frac{k}{b}$.

**Proposition**

*L'intersection du cône standard avec un plan qui ne passe pas par $0$ est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole).*
*L'intersection du cône standard avec un plan qui passe par $0$ est $\{0\}$, une droite ou deux droites.*

# polynômes de degré 2, en dimension 2



En dimension $2$ les polynômes qui manquent dans notre étude s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $ax^2 + by$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont des paraboles $X^2 = 2pY$, avec $X = x$, $p = -\frac{b}{2a}$ et $Y = y - \frac{k}{b}$.

**Proposition**

*L'intersection du cône standard avec un plan qui ne passe pas par $0$ est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole).*
*L'intersection du cône standard avec un plan qui passe par $0$ est $\{0\}$, une droite ou deux droites.*

# polynômes de degré 2, en dimension 2



En dimension $2$ les polynômes qui manquent dans notre étude s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $ax^2 + by$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont des paraboles $X^2 = 2pY$, avec $X = x$, $p = -\frac{b}{2a}$ et $Y = y - \frac{k}{b}$.

## Proposition

*L'intersection du cône standard avec un plan qui ne passe pas par $0$ est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole).*

*L'intersection du cône standard avec un plan qui passe par $0$ est $\{0\}$, une droite ou deux droites.*

# polynômes de degré 2, en dimension 2



En dimension $2$ les polynômes qui manquent dans notre étude s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme $ax^2 + by$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Donc leurs courbes de niveaux $\mathcal{L}_k$ sont des paraboles $X^2 = 2pY$, avec $X = x$, $p = -\frac{b}{2a}$ et $Y = y - \frac{k}{b}$.

## Proposition

*L'intersection du cône standard avec un plan qui ne passe pas par $0$ est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole).*
*L'intersection du cône standard avec un plan qui passe par $0$ est $\{0\}$, une droite ou deux droites.*

# polynômes de degré 2, en dimension 3



En dimension $3$ il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

1. $ax^2 + by^2 + cz$, avec $a$ et $b$ de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une ellipse, un point ou vide.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.
2. $ax^2 - by^2 + cz$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une hyperbole ou deux droites.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.

# polynômes de degré 2, en dimension 3



En dimension $3$ il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

1. $ax^2 + by^2 + cz$, avec $a$ et $b$ de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une ellipse, un point ou vide.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.
2. $ax^2 - by^2 + cz$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une hyperbole ou deux droites.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.

# polynômes de degré 2, en dimension 3



En dimension $3$ il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

1. $ax^2 + by^2 + cz$, avec $a$ et $b$ de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une ellipse, un point ou vide.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.
2. $ax^2 - by^2 + cz$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une hyperbole ou deux droites.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.

# polynômes de degré 2, en dimension 3



En dimension $3$ il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

1. $ax^2 + by^2 + cz$, avec $a$ et $b$ de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une ellipse, un point ou vide.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.
2. $ax^2 - by^2 + cz$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une hyperbole ou deux droites.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.

# polynômes de degré 2, en dimension 3



En dimension $3$ il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

1. $ax^2 + by^2 + cz$, avec $a$ et $b$ de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une ellipse, un point ou vide.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.
2. $ax^2 - by^2 + cz$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une hyperbole ou deux droites.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.

# polynômes de degré 2, en dimension 3

En dimension $3$ il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

1. $ax^2 + by^2 + cz$, avec $a$ et $b$ de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une ellipse, un point ou vide.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.
2. $ax^2 - by^2 + cz$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une hyperbole ou deux droites.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.

# polynômes de degré 2, en dimension 3



En dimension $3$ il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

1. $ax^2 + by^2 + cz$, avec $a$ et $b$ de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une ellipse, un point ou vide.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.
2. $ax^2 - by^2 + cz$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une hyperbole ou deux droites.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.

# polynômes de degré 2, en dimension 3



En dimension $3$ il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

1. $ax^2 + by^2 + cz$, avec $a$ et $b$ de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une ellipse, un point ou vide.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.
2. $ax^2 - by^2 + cz$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une hyperbole ou deux droites.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.

# polynômes de degré 2, en dimension 3



En dimension $3$ il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

1. $ax^2 + by^2 + cz$, avec $a$ et $b$ de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une ellipse, un point ou vide.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.
2. $ax^2 - by^2 + cz$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une hyperbole ou deux droites.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.

# polynômes de degré 2, en dimension 3



En dimension $3$ il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

1. $ax^2 + by^2 + cz$, avec $a$ et $b$ de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une ellipse, un point ou vide.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.
2. $ax^2 - by^2 + cz$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une hyperbole ou deux droites.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.

# polynômes de degré 2, en dimension 3



En dimension $3$ il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

1. $ax^2 + by^2 + cz$, avec $a$ et $b$ de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une ellipse, un point ou vide.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.
2. $ax^2 - by^2 + cz$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
   Leur intersection avec un plan $\{z = h\}$ est une hyperbole ou deux droites.
   Leur intersection avec un plan $\{x = h\}$ ou $\{y = h\}$ est une parabole.