SOLUTIONS DE L'INTERROGATION

13 octobre 2015

[durée : 1 heure]

Exercice 1

On note $\operatorname{tr}(M)$ la trace de la matrice M. On considère les sous-ensembles des espaces vectoriels suivants :

$$\mathcal{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+1)^2 - x^2 + 2y - z = 0\} \quad \subset \quad \mathbb{R}^3$$
$$\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y)(x+y) = 0\} \quad \subset \quad \mathbb{R}^2$$
$$\mathcal{C} = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(M) \geq 0\} \quad \subset \quad M_2(\mathbb{R})$$
$$(\star) \qquad \mathcal{D} = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid x \mapsto f(x) - |x| \in C^1(\mathbb{R})\} \quad \subset \quad C^0(\mathbb{R})$$

Pour chacun de ces sous-ensembles :

a) Déterminer, en justifiant, s'il est un sous-espace affine.

Si c'en est un :

b) déterminer sa direction et un point de ce sous-espace affine ;

c) si possible, donner une droite affine de ce sous-espace affine.

Solution :

$\mathcal{A}$) **a)** $\mathcal{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y - z = -1\}$ est un hyperplan affine, car c'est l'image réciproque de -1 par la forme linéaire $\phi(x,y,z) = 2x + 2y - z$.

b) $\vec{\mathcal{A}} = \operatorname{Ker} \phi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y - z = 0\}$. Le point $\Omega = (0,0,1)$ est un point de $\mathcal{A}$ car $2.0 + 2.0 - 1 = -1$.

c) Nous avons (arbitrairement choisi) $\vec{v} = (1,-1,0) \in \vec{\mathcal{A}}$ car $2.1 + 2.(-1) - 0 = 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \Omega + \mathbb{R}\vec{v} = \{(\lambda, -\lambda, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une droite affine de $\mathcal{A}$.

$\mathcal{B}$) **a)** Le sous-ensemble $\mathcal{B}$ n'est pas un sous-espace affine car il n'est pas stable par barycentre : $(1,1) \in \mathcal{B}$ et $(1,-1) \in \mathcal{B}$, mais $\frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) = (1,0) \notin \mathcal{B}$.

Remarque : $\mathcal{B}$ est la réunion de deux droites affines distinctes, il ne peut pas être un sous-espace affine.

$\mathcal{C}$) **a)** Le sous-ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas un sous-espace affine, car il n'est pas stable par barycentre : $O = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{E}$, $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{E}$, mais $2O - I = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \notin \mathcal{E}$.

Remarque : $\mathcal{E}$ est un demi-espace fermé.

$\mathcal{D}$) **a)** $f \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f(x) - |x| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = |x| + g(x)$. En notant $|\cdot| \in C^0(\mathbb{R})$ la fonction $x \mapsto |x|$, $\mathcal{D} = |\cdot| + C^1(\mathbb{R})$, avec $|\cdot| \in \mathcal{D}$ et $C^1(\mathbb{R})$ sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de $C^0(\mathbb{R})$.

b) D'après la question précédente $\overrightarrow{\mathcal{D}} = C^1(\mathbb{R})$, et le point (fonction) $\Omega = |\cdot| \in \mathcal{D}$ convient.

c) Soit $\vec{v}(x) = x$, alors $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ est un vecteur (fonction) non nul. Donc $\mathcal{D} = \Omega + \mathbb{R}\vec{v} = \big\{x \mapsto |x| + \lambda x \in C^0(\mathbb{R}) \,\big|\, \lambda \in \mathbb{R}\big\}$ est une droite de $\mathcal{D}$.

Exercice 2

On note $\operatorname{tr}(M)$ la trace de la matrice M, et $H_{\Omega,\lambda}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.

On considère les applications suivantes entre espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & \psi &= H_{(1,0),2} \circ H_{(0,1),-1} \\ \xi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & \xi(x) &= (x+1)^3 \\ (\star) \quad \phi : M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, & \phi(M) &= \operatorname{tr}(M + I_2) \end{aligned}$$

Pour chacune de ces applications :

a) Déterminer, en justifiant, s'il s'agit d'une application affine.

b) Si c'en est une, déterminer sa partie linéaire, et si possible sa nature.

c) Est-ce un automorphisme affine ? Si c'en est un, déterminer son inverse.

Solution :

ψ) **a)** ψ est une application affine, comme la composée de deux applications affines.

b) ψ est la composée de deux homothéties de rapports 2 et -1, et comme $2.(-1) = -2 \neq 1$, ψ est une homothétie de rapport -2. Donc $\overrightarrow{\psi} = -2\mathrm{Id}$.

c) ψ est une homothétie de rapport $\lambda = -2$ non nul, donc c'est un automorphisme. L'application inverse de ψ est une homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{2}$. Pour déterminer ψ^{-1} il suffit de déterminer le centre de ψ^{-1}, qui est le même que celui de ψ.
$\psi(x,y) = -(1,0) + 2\big(2(0,1) - (x,y)\big) = (-1,4) - 2(x,y) = 3(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) - 2(x,y)$, donc le centre de ψ est $\Omega = (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$. Ainsi $\psi^{-1} = H_{(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}),-\frac{1}{2}}$.

ξ) **a)** ξ n'est pas une application affine, car elle ne préserve pas les barycentres : $\xi(-1) = 0$, $\xi(0) = 1$, $\xi(1) = 8$, et donc $\xi(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1) = \xi(0) = 1 \neq 4 = \frac{1}{2}\xi(-1) + \frac{1}{2}\xi(1)$.

Remarque : même si ξ est bijective, ce n'est pas un automorphisme affine.

ϕ) **a)** On note T_{I_2} la translation par I_2. Ainsi $\phi = \operatorname{tr} \circ T_{I_2}$ est une application affine, comme la composée de la forme linéaire tr avec l'application affine T_{I_2}.

b) $\overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{\operatorname{tr}} \circ \overrightarrow{T_{I_2}} = \operatorname{tr}$, car tr est linéaire et $\overrightarrow{T_{I_2}} = \mathrm{Id}$.

c) Comme $\dim(M_2(\mathbb{R})) \neq \dim(\mathbb{R})$, ϕ n'est pas un automorphisme.