INTERROGATION

13 octobre 2015

[durée : 1 heure]

⚠ *Les documents ne sont pas autorisés.*

($\star$) *Les exercices avec étoile sont des exercices plus difficiles.*

Exercice 1

On note $\operatorname{tr}(M)$ la trace de la matrice M. On considère les sous-ensembles des espaces vectoriels suivants :

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x+1)^2 - x^2 + 2y - z = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{B} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-y)(x+y) = 0\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{C} = \left\{M \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \operatorname{tr}(M) \geq 0\right\} \subset M_2(\mathbb{R})$$

$$(\star) \qquad \mathcal{D} = \left\{f \in C^0(\mathbb{R}) \;\middle|\; x \mapsto f(x) - |x| \in C^1(\mathbb{R})\right\} \subset C^0(\mathbb{R})$$

Pour chacun de ces sous-ensembles :

a) Déterminer, en justifiant, s'il est un sous-espace affine.

Si c'en est un :

b) déterminer sa direction et un point de ce sous-espace affine ;

c) si possible, donner une droite affine de ce sous-espace affine.

Exercice 2

On note $\operatorname{tr}(M)$ la trace de la matrice M, et $H_{\Omega,\lambda}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.

On considère les applications suivantes entre espaces vectoriels :

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \psi = H_{(1,0),2} \circ H_{(0,1),-1}$$

$$\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \xi(x) = (x+1)^3$$

$$(\star) \quad \phi : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \phi(M) = \operatorname{tr}(M + I_2)$$

Pour chacune de ces applications :

a) Déterminer, en justifiant, s'il s'agit d'une application affine.

b) Si c'en est une, déterminer sa partie linéaire, et si possible sa nature.

c) Est-ce un automorphisme affine ? Si c'en est un, déterminer son inverse.