Fiche 4 : Vecteurs aléatoires discrets

Exercice 1

Les variables aléatoires X et Y sont telles que :

$$\begin{array}{ccc} & P(X=0 \text{ et } Y=1)=1/5 & P(X=0 \text{ et } Y=2)=1/5 \\ P(X=1 \text{ et } Y=0)=1/5 & P(X=1 \text{ et } Y=1)=1/5 & P(X=1 \text{ et } Y=2)=1/5 \end{array}$$

a) Déterminer la loi de X.

b) Déterminer la loi de Y.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Trouver la loi de $Z = X - Y$.

Exercice 2

La loi du couple (U, V) est de la forme :

$$P(U = j, V = k) = C\frac{k}{j!(60-j)!} \quad \text{pour } k \in \{1, 2, \ldots, 59\} \text{ et } j \in \{0, 1, \ldots, 60\}$$

a) Pour connaître vraiment la loi du couple, il faut connaître la constante réelle C dont on ne nous a pas donné la valeur. Calculer C.

b) Calculer la loi de U (et donner son nom si elle en a un).

c) Calculer la loi de V (et donner son nom si elle en a un).

d) U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

On suppose que le couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) a une loi donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{(1 + i + j)!},$$

où α est une constante strictement positive qui sera précisée ultérieurement.

a) Expliquer sans calcul pourquoi les marginales X et Y ont même loi.

b) On pose $S = X + Y$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(S = k) = \frac{\alpha}{k!}.$$

c) En déduire la valeur de α et reconnaître la loi de S.

d) Calculer $P(X = 0)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

e) Calculer $P(X = Y)$ et en déduire sans calcul $P(X > Y)$.

Exercice 4

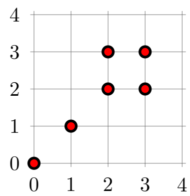
Soient T et U deux variables aléatoires indépendantes de loi géométriques de paramètres α et β (avec α et β fixés dans $]0,1[$).

a) Calculer la loi de leur somme $T+U$, dans le cas où $\alpha \neq \beta$, puis dans le cas où $\alpha = \beta$.

b) En déduire que quand $\alpha = \beta$, $T+U$ est la loi du second succès dans une suite d'épreuves indépendantes où la probabilité de succès vaut α.

c) Dans le cas $\alpha = \beta$, calculer $P(T \neq U)$.

Exercice 5



Dans tout cet exercice, le vecteur aléatoire discret (X,Y) a pour support S l'ensemble des six points représentés sur la figure ci-contre. La loi de (X,Y) est donc donnée par les $P\big((X,Y)=(i,j)\big)$, pour $(i,j) \in S$.

a) Quelles probabilités faut-il attribuer aux différents points de S pour satisfaire simultanément aux deux conditions suivantes :

(i) les points de $[\![2,3]\!]^2$ ont tous même probabilité,

(ii) X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![0,3]\!]$?

b) Lorsque (X,Y) suit la loi déterminée à la question précédente, X et Y sont-elles indépendantes ? On peut répondre sans calcul.

c) Montrer qu'il existe une infinité de lois de (X,Y) avec support S telles que aii soit vérifiée et X et Y non indépendantes.