

FICHE 2 : PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Exercice 1

Une urne contient 10 jetons jaunes, 5 blancs et 1 rouge. J'ai tiré un jeton de cette urne et je vous annonce qu'il n'est pas rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit jaune ?

Exercice 2

Un joueur de tennis a une probabilité de 40% de passer sa première balle de service. S'il échoue, sa probabilité de passer sa deuxième balle est 70%. Lorsque sa première balle de service passe, sa probabilité de gagner le point est 80%, tandis que sa probabilité de gagner le point lorsqu'il passe sa deuxième balle de service n'est plus que 50%.

- a) Calculer la probabilité qu'il passe sa deuxième balle et celle qu'il fasse une double faute.
- b) Calculer la probabilité qu'il perde le point sur son service.
- c) Sachant qu'il a perdu le point, quelle est la probabilité que ce soit sur une double faute ?

Exercice 3

On cherche une girafe qui, avec une probabilité $p/7$, se trouve dans l'un des quelconques des 7 étages d'un immeuble, et avec probabilité $1 - p$ hors de l'immeuble. On a exploré en vain les 6 premiers étages.

- a) Quelle est la probabilité qu'elle habite au septième étage ? On note $f(p)$ cette probabilité.
- b) Représenter la fonction $p \mapsto f(p)$

Exercice 4

On étudie une maladie qui touche 1% d'une population. On dispose d'un test de dépistage de la maladie qui a les caractéristiques suivantes :

- Si la personne est malade, le test est positif avec une probabilité de 99%.
- Si la personne n'est pas malade, le test est positif avec une probabilité de 9%.

Dans la suite, on notera M l'événement «la personne est malade» et T l'événement «le test est positif».

- a) Traduire les données de l'énoncé en donnant, sans aucun calcul, la valeur de chacune des quantités suivantes : $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$ et $P(M)$.
- b) Calculer $P(T)$.

- c) Une personne a effectué le test, qui est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
- d) En déduire le taux de faux positifs $P_T(\overline{M})$ pour ce test médical.
- e) Quel est le taux de faux négatifs $P_{\overline{T}}(M)$?

Exercice 5

Un avion a disparu et la région où il s'est écrasé est divisée pour sa recherche en trois zones de même probabilité. Pour $i = 1, 2, 3$, notons $1 - \alpha_i$ la probabilité que l'avion soit retrouvé par une recherche dans la zone i s'il est effectivement dans cette zone. Les constantes α_i représentent les probabilités de manquer l'avion et sont généralement attribuables à l'environnement de la zone (relief, végétation,...). On notera A_i l'événement *l'avion est dans la zone i* , et R_i l'événement *l'avion est retrouvé dans la zone i* ($i = 1, 2, 3$).

- a) Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer les probabilités que l'avion soit dans la zone i sachant que la recherche dans la zone 1 a été infructueuse.
- b) Étudier brièvement les variations de ces trois probabilités conditionnelles considérées comme fonctions de α_1 et commenter les résultats obtenus.

Exercice 6

On lance deux dés et on considère les événements :

$$A = \{\text{le résultat du premier dé est impair}\},$$

$$B = \{\text{le résultat du second dé est pair}\},$$

$$C = \{\text{les résultats des deux dés sont de même parité}\}.$$

Étudier l'indépendance deux à deux des événements A , B et C , puis l'indépendance mutuelle (indépendance de la famille) A, B, C .

Exercice 7

On s'intéresse à la répartition des sexes des enfants d'une famille de n enfants, avec $n \geq 2$. On prend comme modélisation

$$\Omega_n = \{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_i \in \{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}, i = 1, \dots, n\},$$

muni de l'équiprobabilité. On considère les événements :

$$A = \{\text{la famille a des enfants des deux sexes}\} \quad \text{et} \quad B = \{\text{la famille a au plus une fille}\}.$$

- a) Montrer que $P(A) = (2^n - 2)/2^n$ et $P(B) = (n + 1)/2^n$.
- b) En déduire que A et B ne sont indépendants que si $n = 3$.

Exercice 8

On effectue des lancers répétés d'une paire de dés discernables et on observe pour chaque lancer la somme des points indiqués par les deux dés. On se propose de calculer de deux façons la probabilité de l'événement E défini ainsi : *dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un 9 a lieu avant la première obtention d'un 7.*

- a) Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer ?
- b) Première méthode : On note $N_i = \{\text{obtention d'un 9 au } i\text{-ième lancer}\}$ et pour $n > 1$, $E_n = \{\text{ni 7 ni 9 ne sont obtenus au cours des } n - 1 \text{ premiers lancers et le } n\text{-ième lancer donne 9}\}$. Dans le cas particulier $n = 1$, on pose $E_1 = N_1$.
- (i) Exprimer E à l'aide d'opérations ensemblistes sur les E_n ($n \geq 1$). Exprimer de même chaque E_n à l'aide des N_i et des $A_i = \{\text{autre que 7 et 9 au } i\text{-ième lancer}\}$.
 - (ii) Calculer $P(E_n)$ en utilisant l'indépendance des lancers.
 - (iii) Calculer $P(E)$.
- c) Deuxième méthode : On note $S_1 = \{\text{obtention d'un 7 au premier lancer}\}$.
- (i) Donner une expression de $P(E)$ en utilisant le conditionnement par la partition $\{N_1, S_1, A_1\}$.
 - (ii) Donner sans calcul les valeurs de $P_{N_1}(E)$, $P_{S_1}(E)$ et expliquer pourquoi $P_{A_1}(E) = P(E)$.
 - (iii) En déduire la valeur de $P(E)$.