Solutions de l'interrogation

14 février 2018

[durée : 1 heure]

Exercice 1

Dans un jeu de 3 dés, il y un des dés qui est truqué, et qui ne tombe jamais sur 6 (les cinq autres faces sont équiprobables). On jette les 3 dés et on observe.

a) Quel est l'espace de probabilité que vous considérez ? Quelle est la probabilité d'un événement élémentaire ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 dés identiques ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 dés identiques ?

Solution :

a) L'espace de probabilité considéré est $\Omega = \{1, \ldots, 5\} \times \{1, \ldots, 6\}^2$ avec la probabilité uniforme. Comme le nombre d'éléments de Ω est $\#\Omega = 5 \times 6^2 = 180$, la probabilité d'obtenir une configuration particulière (un événement élémentaire) est de $\frac{1}{180}$.

b) L'événement 3×6 est impossible, et pour tout autre $i = 1, \ldots, 5$, la probabilité d'obtenir $3 \times i$ est de $\frac{1}{180}$. Donc la probabilité d'obtenir 3 dés identiques est de $5 \times \frac{1}{180} = \frac{1}{36}$.

c) Le nombre de configurations avec trois résultats différents est $5 \times 5 \times 4 = 100$. Donc la probabilité d'avoir les trois dés différents est $\frac{100}{180} = \frac{5}{9}$. Ainsi finalement la probabilité d'avoir deux dés identiques est $1 - \frac{1}{36} - \frac{5}{9} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Exercice 2

Un enseignant pose une question à un étudiant qui doit répondre par oui ou non. On sait que l'étudiant connaît la bonne réponse avec probabilité p et dans ce cas il donne la bonne réponse. Si l'étudiant ne connaît pas la réponse, il répond alors au hasard «oui» ou «non» avec probabilité $1/2$ chacun.

En écrivant proprement les événements en jeu, calculer les probabilités :

a) que l'étudiant donne la bonne réponse,

b) que l'étudiant connaisse la bonne réponse sachant qu'il a répondu correctement.

Solution :

a) On note C =«l'étudiant connaît la bonne réponse» et R=«l'étudiant donne la bonne réponse». D'après l'énoncé on a $P(C) = p$, $P(R|C) = 1$ et $P(R|\overline{C}) = \frac{1}{2}$. Ainsi $P(R) = P(R|C)P(C) + P(R|\overline{C})P(\overline{C}) = 1p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1+p}{2}$.

b) Nous avons $P(C|R) = \frac{P(R|C)P(C)}{P(R)} = \frac{2p}{1+p}$.

Exercice 3

Dans un lot de 100 composants électroniques, il y a deux composants défectueux. On prélève au hasard sans remise n composants dans ce lot et on note X le nombre de composants défectueux parmi les n prélevés.

a) On suppose que $2 \leqslant n \leqslant 98$. Donner la loi de X.

b) Quelle est la loi de X si $n = 100$?

c) Je choisis un composant au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?

d) En déduire la loi de X si $n = 1$.

e) En déduire aussi la loi de X si $n = 99$.

Solution :

a) Comme il s'agit d'un tirage sans remise de n éléments parmi 100 et X compte l'apparition de 2 de ces éléments, on a $X \sim \mathcal{HG}(100, n, 2)$ avec $X \in \{0, 1, 2\}$ et $P(X = k) = \frac{C_2^k C_{98}^{n-k}}{C_{100}^n}$ pour $k = 0, 1, 2$. Cette formule marche pour tout $n \in [\![0, 100]\!]$, non seulement pour $2 \leqslant n \leqslant 98$.

b) Si on prend les 100 composants électroniques on sait que $X = 2$, donc X est une constante et $P(X = 2) = 1$. On retrouve ce résultat avec la formule générale car $P(X = k) = \frac{C_2^k C_{98}^{100-k}}{C_{100}^{100}}$ et $C_{98}^{100} = C_{98}^{99} = 0$, donc $P(X = 0) = P(X = 1) = 0$ et $P(X = 2) = \frac{C_2^2 C_{98}^{98}}{C_{100}^{100}} = 1$.

c) $P(\text{«un composant défectueux»}) = \frac{2}{100}$.

d) Pour $n = 1$ nous avons $X \in \{0, 1\}$ et d'après la question précédente on a $P(X = 1) = \frac{2}{100}$ et $P(X = 0) = 1 - P(X = 1) = \frac{98}{100}$. On peut retrouver ce résultat par la formule générale : $P(X = 0) = \frac{C_2^0 C_{98}^1}{C_{100}^1} = \frac{98}{100}$, $P(X = 1) = \frac{C_2^1 C_{98}^0}{C_{100}^1} = \frac{2}{100}$ et $P(X = 2) = \frac{C_2^2 C_{98}^{-1}}{C_{100}^1} = 0$.

e) Si on pose Y =«le nombre de composants défectueux parmi les $100 - n$ non prélevés», nous avons $X + Y = 2$ et $Y \sim \mathcal{HG}(100, 100 - n, 2)$. Ainsi pour $n = 99$ on a $Y \sim \mathcal{HG}(100, 1, 2)$ et donc d'après la question précédente $P(X = 2) = P(Y = 0) = \frac{98}{100}$, $P(X = 1) = P(Y = 1) = \frac{2}{100}$ et $P(X = 0) = P(Y = 2) = 0$. On peut, comme dans les questions précédentes, retrouver ce résultat par la formule générale.