INTERROGATION

28 mars 2018

[durée : 1 heure]

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n = \frac{nx}{1+(nx)^3}$.

a) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $\mathbb{R}_+$ et sur $[\varepsilon, \infty[$ pour $\varepsilon > 0$.

b) Étudier la convergence simple et uniforme de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur ces mêmes ensembles.

Exercice 2

L'équation $y''(x) = -y(x)$, sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, admet une unique solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, cette solution est appelée $\sin(x)$. Il existe également une unique solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, cette solution est appelée $\cos(x)$. On rappelle que la fonction exponentielle est la valeur de la série $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ pour $\forall z \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$ et $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(2k)}}{(2k)!}$ pour $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer la formule d'Euler $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.