

---

## FICHE 5 : MOMENTS DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

---

### Exercice 1

On lance un dé équilibré. On désigne par  $X$  le nombre obtenu avec ce dé.

- Déterminer l'espérance  $E(X)$  et la variance  $V(X)$  de  $X$ .
- Calculer l'espérance et la variance de la somme obtenue en lançant trois dés. Comparer aux valeurs de l'espérance et de la variance de trois fois la valeur d'un dé.

### Exercice 2

Alice et Bob jouent aux dés. La partie est déjà bien engagée, et à ce stade, c'est à Alice de lancer les deux dés. Si au moins un des dés donne cinq, elle gagne, et Bob doit lui donner 11€. Si elle n'obtient pas de cinq, elle perd, et elle doit alors 11€ à son adversaire. Bob propose : « tu ne lances pas les dés, tu me donnes directement 4€ et nous sommes quittes. » On veut déterminer si Alice a intérêt à accepter ce marché.

- On note  $X$  la somme (positive ou négative) que va gagner Bob. Quelle est la loi de  $X$  ?
- Calculer son espérance  $E(X)$ . Comparer ce gain moyen avec la somme de 4 euros que Bob réclame et conclure.

### Exercice 3

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  admettant une espérance.

- Montrer que l'on a  $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$ . Donner et démontrer une formule analogue pour  $E(X^2)$  (si  $X^2$  admet une espérance).
- Soit  $X$  est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre  $p$ , avec  $p \in ]0, 1[$ . Utiliser la question précédente pour retrouver l'espérance de  $X$ .

### Exercice 4

Dans une urne contenant au départ une boule verte et une rouge on effectue une suite de tirages d'une boule selon la procédure suivante. Chaque fois que l'on tire une boule verte, on la remet dans l'urne *en y rajoutant une boule rouge*. Si l'on tire une boule rouge, on arrête les tirages. On désigne par  $X$  le nombre de tirages effectués par cette procédure. On notera  $V_i$  (resp.  $R_i$ ) l'événement *obtention d'une boule verte au  $i^e$  tirage* (resp. *rouge*).

- a) Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , donner une expression de l'événement  $\{X = k\}$  à l'aide des événements  $V_i$  ( $1 \leq i \leq k - 1$ ) et  $R_k$ .
- b) Que vaut  $P_{V_1 \cap \dots \cap V_{n-1}}(V_n)$  pour  $n \geq 2$  ?
- c) Déterminer la loi de  $X$ .
- d) Calculer  $E(X)$ .
- e) Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $1/X$ .
- f) On recommence l'expérience en changeant la procédure : à chaque tirage d'une boule verte on la remet dans l'urne *en y rajoutant une boule verte*. Comme précédemment, on interrompt les tirages à la première apparition d'une boule rouge. Soit  $Y$  le nombre de tirages effectués suivant cette nouvelle procédure. Trouver la loi de  $Y$ . Que peut-on dire de l'espérance de  $Y$  ? Interpréter.

### Exercice 5

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Justifier que l'espérance de la variable aléatoire discrète  $Y = e^X$  existe et la calculer. On dit que  $X$  admet un moment exponentiel.

### Exercice 6

Soit  $X$  une variable aléatoire, prenant toutes les valeurs entières comprises entre  $-5$  et  $5$ , dont la loi est définie par :

$$P(X = i - 5) = C_{10}^i \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad (0 \leq i \leq 10).$$

- a) Calculer  $E(X)$ ,  $E(X^2)$ ,  $V(X)$ .
- b) Donner la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $Y$ , définie par :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } |X| > 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

### Exercice 7

Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $E(X) = 1$  et  $V(X) = 5$ . Trouver

- a) l'espérance  $E((2 + X)^2)$  ;
- b) la variance  $V(4 - 3X)$ .

### Exercice 8

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ . On définit les variables aléatoires  $S = X + Y$  et  $D = |X - Y|$ .

- Donner les lois de  $S$  et  $D$ .
- Calculer  $\text{Cov}(S, D)$ . Les variables aléatoires  $S$  et  $D$  sont-elles indépendantes?

### Exercice 9

On considère une suite de  $n$  épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant  $k$  résultats possibles  $r_1, \dots, r_k$ . On note  $p_i$  la probabilité de réalisation du résultat  $r_i$  lors d'une épreuve donnée. Par exemple si on lance  $n$  fois un dé,  $k = 6$  et  $p_i = 1/6$  pour  $1 \leq i \leq 6$ . Si on lance  $n$  fois une paire de dés et que l'on s'intéresse à la somme des points,  $k = 11$  et les  $p_i$  sont donnés par le tableau des  $P(S = i + 1)$  :  $p_1 = 1/36$ ,  $p_2 = 2/36, \dots$

Pour  $1 \leq i \leq k$ , notons  $X_i$  le nombre de réalisations du résultat  $r_i$  au cours des  $n$  épreuves.

- Expliquer sans calcul pourquoi  $V(X_1 + \dots + X_k) = 0$ .
- Quelle est la loi de  $X_i$ ? Que vaut sa variance?
- Pour  $i \neq j$ , donner la loi et la variance de  $X_i + X_j$ .
- En déduire  $\text{Cov}(X_i, X_j)$ .
- Contrôler ce résultat en développant  $V(X_1 + \dots + X_k)$  et en utilisant la première question.