

---

## FICHE 4 : VECTEURS ALÉATOIRES DISCRETS

---

### Exercice 1

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont telles que :

$$P(X = 0 \text{ et } Y = 1) = 1/5 \quad P(X = 0 \text{ et } Y = 2) = 1/5 \\ P(X = 1 \text{ et } Y = 0) = 1/5 \quad P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = 1/5 \quad P(X = 1 \text{ et } Y = 2) = 1/5$$

- Déterminer la loi de  $X$ .
- Déterminer la loi de  $Y$ .
- Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- Trouver la loi de  $Z = X - Y$ .

### Exercice 2

La loi du couple  $(U, V)$  est de la forme :

$$P(U = j, V = k) = C \frac{k}{j!(60-j)!} \quad \text{pour } k \in \{1, 2, \dots, 59\} \text{ et } j \in \{0, 1, \dots, 60\}$$

- Pour connaître vraiment la loi du couple, il faut connaître la constante réelle  $C$  dont on ne nous a pas donné la valeur. Calculer  $C$ .
- Calculer la loi de  $U$  (et donner son nom si elle en a un).
- Calculer la loi de  $V$  (et donner son nom si elle en a un).
- $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes ?

### Exercice 3

On suppose que le couple de variables aléatoires discrètes  $(X, Y)$  a une loi donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{(1+i+j)!},$$

où  $\alpha$  est une constante strictement positive qui sera précisée ultérieurement.

- Expliquer sans calcul pourquoi les marginales  $X$  et  $Y$  ont même loi.
- On pose  $S = X + Y$ . Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(S = k) = \frac{\alpha}{k!}.$$

- En déduire la valeur de  $\alpha$  et reconnaître la loi de  $S$ .

- d) Calculer  $P(X = 0)$ . Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- e) Calculer  $P(X = Y)$  et en déduire sans calcul  $P(X > Y)$ .

#### Exercice 4

Soient  $T$  et  $U$  deux variables aléatoires indépendantes de loi géométriques de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  (avec  $\alpha$  et  $\beta$  fixés dans  $]0, 1[$ ).

- a) Calculer la loi de leur somme  $T + U$ , dans le cas où  $\alpha \neq \beta$ , puis dans le cas où  $\alpha = \beta$ .
- b) En déduire que quand  $\alpha = \beta$ ,  $T + U$  est la loi du second succès dans une suite d'épreuves indépendantes où la probabilité de succès vaut  $\alpha$ .
- c) Dans le cas  $\alpha = \beta$ , calculer  $P(T \neq U)$ .

#### Exercice 5

Lors d'un congrès à Grenoble,  $n$  chercheurs se répartissent de façon aléatoire et indépendamment les uns des autres dans les  $r > 1$  hôtels,  $H_1, \dots, H_r$ , de la ville. On désigne par  $p_i \in ]0, 1[$  la probabilité qu'un chercheur aille dans l'hôtel  $H_i$ , de sorte que  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , et par  $X_i$  le nombre de personnes qui vont dans l'hôtel  $H_i$ .

- a) Soit  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Quelle est la loi de  $X_i$  ?
- b) Déterminer  $P(X_1 = n_1, \dots, X_r = n_r)$  pour tout  $r$ -uplets  $(n_1, \dots, n_r)$  tel que  $n_1 + \dots + n_r = n$ .
- c) Les variables  $X_i$  sont-elles deux à deux indépendantes ?

#### Exercice 6

Pour les besoins médicaux (en particulier les transfusions), on classe le sang humain en quatre groupes : groupe O, groupe A, groupe B et groupe AB. Mais le sang présente aussi un « facteur rhésus », qui peut être positif ou négatif. Il y a donc huit<sup>1</sup> catégories de sang (O positif, O négatif, A positif, A négatif, etc).

En France, une personne choisie au hasard a 43% de chances d'être du groupe O, 45% de chances d'être du groupe A, 9% de chances d'être du groupe B, et 3% de chances d'être du groupe AB. Parmi les personnes du groupe O, 14% sont de rhésus négatif. La proportion de rhésus négatif est de 13% parmi les personnes du groupe A. Elle est de 22% parmi les gens de groupe sanguin B, et de 33% parmi les personnes du groupe AB.

- a) Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard soit de rhésus positif ?

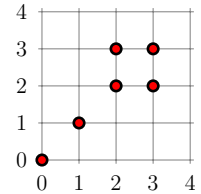
---

1. Il y a en réalité beaucoup plus de catégories, basées sur une trentaine de caractéristiques du sang. Mais les deux caractéristiques ci-dessus (ABO et rhésus) sont les plus importantes pour assurer la compatibilité des transfusions. Et ces deux caractéristiques ne déterminent que huit catégories.

- b) Si l'on sait qu'une personne est de rhésus négatif, quelle est la probabilité qu'elle soit du groupe AB ?
- c) Dans un groupe de TD de 24 étudiants, on note  $N_O, N_A, N_B$  et  $N_{AB}$  les nombres respectifs d'étudiants ayant le groupe sanguin O, A, B et AB. Quelle est la loi du vecteur aléatoire  $(N_O, N_A, N_B, N_{AB})$  ? Indiquer aussi les quatre lois des variables aléatoires  $N_O, N_A, N_B$  et  $N_{AB}$ .
- d) Quelle est la loi du couple aléatoire  $(N_O + N_A, N_B + N_{AB})$  ?

### Exercice 7

Dans tout cet exercice, le vecteur aléatoire discret  $(X, Y)$  a pour support  $S$  l'ensemble des six points représentés sur la figure ci-contre. La loi de  $(X, Y)$  est donc donnée par les  $P((X, Y) = (i, j))$ , pour  $(i, j) \in S$ .



- a) Quelles probabilités faut-il attribuer aux différents points de  $S$  pour satisfaire simultanément aux deux conditions suivantes :
  - (i) les points de  $\llbracket 2, 3 \rrbracket^2$  ont tous même probabilité,
  - (ii)  $X$  et  $Y$  suivent la loi uniforme sur  $\llbracket 0, 3 \rrbracket$  ?
- b) Lorsque  $(X, Y)$  suit la loi déterminée à la question précédente,  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ? On peut répondre sans calcul.
- c) Montrer qu'il existe une infinité de lois de  $(X, Y)$  avec support  $S$  telles que (ii) soit vérifiée et  $X$  et  $Y$  non indépendantes.