
FICHE 1 : ESPACES PROBABILISÉS

Exercice 1

Trois enfants lancent chacun un ballon en direction d'un panier de basket. Il est convenu que celui qui marquera gagnera un paquet de bonbons, et qu'en cas d'ex-æquo les vainqueurs se partageront le paquet. Si personne ne réussit son panier, chacun mangera le tiers des bonbons. En utilisant les événements :

$$A = \{\text{Arthur marque un panier}\},$$

$$B = \{\text{Béatrice marque un panier}\},$$

$$C = \{\text{Cécile marque un panier}\},$$

écrire de façon ensembliste les événements suivants :

$$D = \{\text{tous les trois réussissent à marquer}\},$$

$$E = \{\text{aucun ne réussit à marquer}\},$$

$$F = \{\text{Béatrice mange tous les bonbons}\},$$

$$G = \{\text{les trois enfants mangent des bonbons}\},$$

$$H = \{\text{Cécile mange au moins un bonbon}\},$$

$$I = \{\text{Arthur ne reçoit aucun bonbon}\}.$$

Préciser un univers Ω permettant de décrire cette expérience. Parmi tous ces événements, lesquels sont des événements élémentaires ?

Exercice 2

En probabilités, on énumère assez souvent les issues élémentaires possibles d'une expérience, mais on dresse rarement la liste de tous les événements observables. Le but de cet exercice est de comprendre pourquoi.

- Étant donné un ensemble Ω soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . Si l'ensemble Ω a n éléments, combien l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ a-t-il d'éléments ?
- On réalise une expérience simple : un tirage dans une urne contenant 3 jetons numérotés 1, 2 et 3. Donner l'ensemble Ω des issues possibles de cette expérience et l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ correspondant, qui représente la famille des événements observables.
- On réalise une expérience un peu moins simple : le lancer de deux dés de couleurs différentes. Quel est le cardinal de Ω ? Si on utilise un ordinateur pour décrire tous les

événements observables et si chacun occupe 6 bits (pourquoi?), quel espace mémoire l'ensemble des observables occupera-t-il en tout? Calculer la hauteur de la pile de CD-ROMs nécessaire (épaisseur : 1,2 mm, contenance : 800 mégaoctets¹).

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire à pile ou face n fois.

- Donner une représentation de l'espace Ω des événements élémentaires de cette expérience.
- Écrire l'événement $F = \{\text{pile n'a pas été obtenu lors des 2 premiers lancers}\}$ comme sous-ensemble de Ω .
- Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Décrire les éléments de l'événement $E_i = \{\text{le résultat du } i\text{-ième lancer est pile}\}$.
- Écrire à l'aide des événements E_i l'événement F .
- Écrire à l'aide des événements E_i l'événement $G = \{\text{la pièce est tombée au moins une fois sur pile}\}$.
- Écrire à l'aide des ensembles E_i l'événement $H = \{\text{la pièce est tombée au moins deux fois sur pile}\}$.

Exercice 4

On tire, une à une, sans les remettre dans le paquet, cinq cartes dans un jeu de 32 cartes; chaque succession de cartes ainsi tirées s'appelle une main.

- Quel est l'espace de probabilité que vous considérez?
- Quelle est la probabilité qu'une main contienne :
 - Que des cartes d'une même couleur²?
 - Exactement trois rois? Au plus un roi? Au moins un roi ou un as?
- Mêmes questions si le tirage se fait avec remise.

Exercice 5

On relève les dates d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes (jours numérotés de 1 à 365). On suppose que les jours de naissance sont équiprobables. Quelle est la probabilité que deux personnes au moins aient le même anniversaire?

1. Rappelons que un mégaoctet vaut $10^6 \approx 2^{20}$ octets.

2. Dans le jeu de cartes il y a 4 couleurs : ♠, ♥, ♣ et ♦.

Exercice 6

- a) En dénombrant les façons de tirer n boules parmi n boules blanches et n boules noires, montrer que :

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2.$$

- b) Retrouver cette formule à partir de l'identité $(1+t)^n(1+t)^n = (1+t)^{2n}$.
- c) Deux personnes lancent chacune n fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité p_n qu'elles obtiennent le même nombre de piles ?

Indication : On utilisera l'équiprobabilité sur l'espace $\Omega = \{\mathbf{f}, \mathbf{p}\}^{2n}$.

- d) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Indication : On rappelle la formule de Stirling :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \varepsilon_n), \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

- e) Que pensez vous de l'affirmation suivante : *Lorsqu'on jette un grand nombre (pair) de fois une pièce équilibrée, il y a une forte probabilité d'obtenir exactement autant de piles que de faces ?*

Exercice 7

Une secrétaire un peu distraite a tapé N lettres et préparé N enveloppes portant les adresses des destinataires, mais elle répartit au hasard les lettres dans les enveloppes. Pour modéliser cette situation, on choisit comme espace probabilisé Ω_N ensemble de toutes les permutations sur $\{1, \dots, N\}$ muni de l'équiprobabilité P_N . Pour $1 \leq j \leq N$, on note A_j l'événement *la j -ième lettre se trouve dans la bonne enveloppe*.

- a) Calculer $P_N(A_j)$.
- b) On fixe k entiers $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ entre 1 et N . Dénombrer toutes les permutations σ sur $\{1, \dots, N\}$ telles que $\sigma(i_1) = i_1, \sigma(i_2) = i_2, \dots, \sigma(i_k) = i_k$. En déduire $P_N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$.
- c) On note B l'événement *au moins une des lettres est dans la bonne enveloppe*. Exprimer B à l'aide des A_j .
- d) Utiliser la formule de Poincaré pour calculer $P_N(B)$ et sa limite quand N tend vers l'infini.