Licence 2e année, mention Mathématiques — 2016-2017
M43, Probabilités discrètes

Examen de seconde session

20 juin 2017

[durée : 3 heures]

⚠ *Vous êtes autorisés à garder une feuille A4 manuscrite recto-verso.*
Tout autre document est interdit. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer ; sinon, donner un contre-exemple. Aucune réponse non justifiée ne sera prise en compte.

a) Si X et Y sont deux variables aléatoires de loi de Poisson de paramètre λ, alors $\mathbb{E}(X+Y) = 2\lambda$.

b) Si X et Y sont deux variables aléatoires de loi de Poisson de paramètre λ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre 2λ.

c) Dans une urne composée de 3 boules blanches et 3 boules rouges, on effectue deux tirages avec remise puis deux tirages sans remise. On note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la k-ième boule est rouge et 0 sinon. Alors les variables aléatoires X_2 et X_4 ont même loi mais les couples (X_1, X_2) et (X_3, X_4) n'ont pas même loi.

d) Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Si $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ alors X et Y sont indépendantes.

Exercice 2 On s'intéresse à deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité. La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et la variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. On sait que la covariance du couple (X, Y) est nulle et qu'on a une chance sur douze d'avoir $X + Y = 3$.

a) Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. En déduire $\mathbb{E}(XY)$.

b) Trouver la loi du couple (X, Y) en expliquant pas à pas les calculs effectués.
On présentera de préférence le résultat final sous forme d'un tableau.

c) Ces deux variables aléatoires sont-elle indépendantes ?

T.S.V.P.

Exercice 3 On s'intéresse à la fiabilité d'un alcootest pour automobilistes. Grâce à des études statistiques sur un grand nombre d'automobilistes, on sait que 5% d'entre eux dépassent la dose d'alcool autorisée. Aucun test n'est fiable a 100%. Pour celui que l'on considère, la probabilité que le test soit positif quand la dose d'alcool autorisée est dépassée est $0,95$. La probabilité que le test soit négatif quand elle ne l'est pas, vaut aussi $0,95$.

a) On contrôle un automobiliste. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

b) Quelle est la probabilité qu'un automobiliste ayant un test positif ait réellement dépassé la dose d'alcool autorisée ?

c) Un policier affirme : ce test est beaucoup plus fiable le samedi soir à la sortie des boites de nuit ! La proportion d'automobilistes ayant trop bu est alors de 50%. En reprenant les deux questions précédentes, justifier la remarque du policier.

Exercice 4

a) On lance un dé à 6 faces équilibré, on note X le nombre de points obtenus.
Pour k de 1 à 5, calculer $P_{\{X\neq 6\}}(X = k)$.

b) Un joueur lance un dé à 6 faces équilibré. S'il obtient 1, 2, 3, 4 ou 5, il avance son pion du nombre de cases correspondant. S'il obtient 6 il rejoue, et s'il obtient de nouveau 6 il rejoue à nouveau, jusqu'à ce qu'il obtienne 1, 2, 3, 4 ou 5. Il avance alors son pion d'autant de cases qu'il a obtenu de points en tout. On note N le nombre de fois où le joueur lance le dé, Y le nombre de points obtenus lors du dernier lancer et Z le nombre de cases total dont le pion a avancé. *Par exemple, si le joueur a fait* 6, 6, 6 *et* 3, *il a donc lancé* $N = 4$ *fois le dé, a obtenu* $Y = 3$ *au dernier lancer et a avancé au total de* $Z = 21$ *cases.*
Donner une expression de la variable aléatoire Z en fonction de N et Y.

c) Déterminer la loi de N, donner son espérance et sa variance.

d) Déterminer la loi de Y, donner son espérance et sa variance.

e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $\mathbb{P}(Z = 6k)$?

f) En admettant l'indépendance de N et Y, calculer la loi de Z.

g) Calculer l'espérance et la variance de Z.