

INTERROGATION

10 mars 2017

[durée : 2 heures]



*Vous êtes autorisés à garder une feuille A4 manuscrite recto-verso.
Tout autre document est interdit. Les calculatrices sont interdites.*

Exercice 1

Une boîte contient 8 cubes : 1 gros rouge et 3 petits rouges, 2 gros verts et 1 petit vert, et enfin 1 petit jaune.

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (on suppose que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur).

a) Proposer un espace de probabilité permettant de modéliser cette expérience aléatoire.

Dans la suite, on demande de donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b) Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir des cubes de 3 couleurs différentes ».

c) Calculer la probabilité de l'événement B : « obtenir au plus un petit cube ».

Exercice 2

Dans une colonie de vacances, on organise le jeu suivant. On a disposé le long d'un parcours 10 balises. Un concurrent court le long du parcours : à chaque fois qu'il arrive à une balise, on lui tend trois enveloppes extérieurement identiques. L'une contient une étiquette portant le numéro 1, une autre contient une étiquette portant le numéro 2 et la dernière le numéro 3. Il en choisit une au hasard et prend l'étiquette qui s'y trouve. S'il découvre un chiffre qu'il n'a pas encore, il le garde, sinon il le jette. Le concurrent a gagné* dès qu'il a collecté les trois numéros 1, 2 et 3.

a) Proposer un espace de probabilité permettant de modéliser cette expérience aléatoire.

b) Calculer la probabilité qu'au bout du parcours le concurrent n'ait collecté que l'étiquette 1.

c) Calculer la probabilité qu'au bout du parcours il n'ait pas collecté l'étiquette 3.

d) Calculer la probabilité qu'il perde.

e) Calculer la probabilité qu'il trouve l'étiquette 2 avant l'étiquette 3.

f) Calculer la probabilité qu'il gagne exactement à la 5^e balise.

*. Plusieurs concurrent peuvent être gagnants.

Exercice 3

Dans une maternité, on sait que

- 10% des accouchements ont lieu avant terme,
- 40% des accouchements avant terme présentent des complications,
- 20% des accouchements à terme présentent des complications.

- a) Quelle est la probabilité de l'événement « l'accouchement présente des complications » ?
- b) On sait que Madame B. a eu un accouchement avec des complications. Quelle est la probabilité que son accouchement ait eu lieu avant terme ?

(On donnera la réponse sous forme d'une fraction irréductible.)

Exercice 4

On dispose de 3 dés à 6 faces. Le dé A porte sur ses faces les numéros 4, 4, 4, 4, 0, 0 (4 faces portent un 4 et 2 faces un 0) ; le dé B porte le numéro 3 sur toutes ses faces et le dé C portent les numéros 6, 6, 2, 2, 2, 2 (2 faces portent un 6 et 4 faces un 2). On lance les trois dés[†] et on note $\{A > B\}$ l'événement « le résultat du dé A est supérieur au résultat du dé B ».

- a) Déterminer la probabilité de l'événement $\{A > B\}$.

Si la probabilité de l'événement $\{A > B\}$ est strictement supérieure à $1/2$, on dit que « le dé A est plus fort que le dé B ».

- b) Parmi les dés A et B , est-ce que l'un des deux dés est plus fort ?
- c) De la même façon, parmi les dés B et C , est-ce que l'un des deux dés est plus fort ?
- d) Parmi les dés A et C , est-ce que l'un des deux dés est plus fort ?
- e) Montrer qu'avec ces 3 dés, quel que soit le dé choisi par un joueur, son adversaire peut toujours choisir un dé *plus fort*.

A partir de maintenant, on change un peu les règles du jeu : on lance chaque dé deux fois et on fait la somme des deux résultats obtenus. On note X_A (resp. X_B , resp. X_C) la variable aléatoire qui donne la somme des résultats de deux lancers indépendants du dé A (resp. du dé B , resp. du dé C).

- f) Déterminer la loi de chacune des variables aléatoires X_A , X_B et X_C .

On dit que « le dé A est plus costaud que le dé B » si l'événement $\{X_A > X_B\}$ a une probabilité strictement supérieure à $1/2$.

- g) Montrer que C est plus costaud que B .
- h) Qu'en est-il pour A et B ? Qu'en est-il pour A et C ?
- i) Si je joue à cette deuxième version du jeu, quel dé ai-je intérêt à choisir ?

[†]. Les résultats des 3 dés sont considérées indépendants.