Licence 2^e année, mention Mathématiques 2016-2017
M43, Probabilités discrètes

Interrogation

29 mars 2017

[durée : 1 heure]

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Dans un lot de 100 composants électroniques, il y a deux composants défectueux. On prélève au hasard sans remise n composants dans ce lot et on note X le nombre de composants défectueux parmi les n prélevés.

a) On suppose que $2 \leqslant n \leqslant 98$. Donner la loi de X.

b) Exprimer le plus simplement possible $P(X = 2)$ lorsque $2 \leqslant n \leqslant 98$.

c) Quelle est la loi de X si $n = 100$?

d) Je choisis un composant au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?

e) En déduire la loi de X si $n = 1$.

f) En déduire aussi la loi de X si $n = 99$.

Exercice 2

On s'intéresse à la reproduction d'un insecte. On suppose que chacun de ses œufs donne naissance à un nouvel insecte avec une probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment du nombre d'œufs pondus et de l'éclosion des autres œufs.

a) Si l'insecte a pondu 5 œufs, quelle est la probabilité qu'exactement 3 insectes éclosent ?

On note maintenant N la variable aléatoire comptant le nombre d'œufs qu'un insecte donné pond. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note D le nombre d'insectes éclos.

b) Quelle est la loi de D sachant que $\{N = n\}$ avec $n \geqslant 1$?

T.S.V.P.

c) En déduire que pour tout $(n, d) \in \mathbb{N}^2$

$$P(D = d \text{ et } N = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } d > n \\ \dfrac{(\lambda p)^d}{d!}\, e^{-\lambda}\, \dfrac{\left[\lambda(1-p)\right]^{n-d}}{(n-d)!} & \text{si } d \leqslant n \end{cases}.$$

d) Démontrer que D suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

e) On suppose dans cette question que le produit $p\lambda$ est égal à 1. Soit E la variable

$$E = \begin{cases} \text{« peu »} & \text{si} \quad D < 4 \\ \text{« beaucoup »} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Déterminer la loi de E.