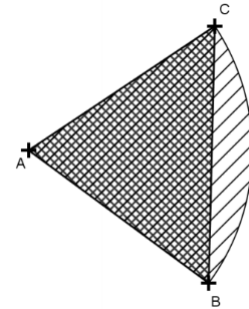


Thème : problème conduisant à l'étude de fonctions

L'exercice

La figure ci-contre représente une portion d'un disque de centre A et de rayon 1. On fait varier la mesure en radian de l'angle \widehat{BAC} dans l'intervalle $]0; \pi]$.



Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} d'une mesure de l'angle \widehat{BAC} pour laquelle il y a égalité des aires de la surface hachurée et de la surface quadrillée.

Adapté du manuel Maths'x terminale S spécifique programme 2012

Les productions de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

J'ai posé $\widehat{BAC} = \alpha$ donc l'aire de ABC = $\frac{B \times h}{2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

L'aire du secteur hachuré est égale à l'aire de la portion de disque privé de l'aire du triangle ABC.

Je résous l'équation

$$\frac{\alpha}{2} - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$
Je pose $f(\alpha) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}$.

Avec ma calculatrice graphique, je trouve une solution entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

J'ai écrit un programme en langage python.

Il retourne $a = 3,14082566319585$ et $b = 3,141592653589793$.

```

1 from math import sin, cos, pi
2 def f(x):
3     return 2*sin(x/2)*cos(x/2)-x/2
4 def dichotomie():
5     a = pi/2
6     b = pi
7     while b-a >= 0.001:
8         m = (a+b)/2
9         if f(m) < 0:
10            a = m
11        else:
12            b = m
13    return a, b
                    
```

Élève 2

J'ai posé $x = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ donc l'aire de ABC est $\sin(x) \cos(x)$ et l'aire du secteur hachuré $x - \sin(x) \cos(x)$.

Je résous l'équation $x - 2 \sin(x) \cos(x) = 0$.

J'étudie la fonction f définie par $f(x) = x - 2 \sin(x) \cos(x) = x - \sin(2x)$ donc $f'(x) = 1 - \cos(2x)$.

Comme la dérivée est positive, f est strictement croissante.

D'après le théorème de bijection il y a une unique solution.

Les questions à traiter devant le jury

- 1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.
- 2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.
- 3 – Proposer deux exercices sur le thème *problème conduisant à l'étude de fonctions* l'un au moins permettant de développer la compétence « modéliser ».