

## Thème : conjecture et démonstration

**L'exercice**

Imaginons qu'une calculatrice comporte une nouvelle touche, nommée  $\otimes$ , qui double le nombre saisi puis retranche 1. J'entre un nombre  $x$  et j'appuie  $n$  fois sur cette touche  $\otimes$ .

1. En fonction de  $x$  et  $n$ , conjecturer l'expression obtenue après avoir appuyé  $n$  fois sur la touche  $\otimes$ .
2. Démontrer votre conjecture.

**Les réponses de deux élèves de terminale scientifique****Élève 1**

1. Je trouve  $2x - 1$  après avoir appuyé 1 fois sur  $\otimes$ ,  $4x - 1$  après avoir appuyé 2 fois sur  $\otimes$ ,  $8x - 1$  après avoir appuyé 3 fois sur  $\otimes$ .  
Je conjecture qu'après avoir appuyé  $n$  fois sur la touche  $\otimes$  on obtient  $2^n x - 1$ .
2. Pour  $n = 1$  on a  $2^1 x - 1 = 2x - 1$ , et si on part de  $2^n x - 1$  alors en appuyant encore une fois sur la touche  $\otimes$  on obtient  $2 \times 2^n x - 1$  donc  $2^{n+1} x - 1$ . Ce qui permet d'établir la conjecture.

**Élève 2**

1. Je note  $r_n$  le résultat obtenu après avoir appuyé  $n$  fois sur la touche  $\otimes$ .  
Je pars de  $r_1 = x$ , donc après avoir appuyé 1 fois sur  $\otimes$  j'obtiens  $r_2 = 2x - 1$ .  
Puis  $r_3 = 2r_2 - 1$  donc  $r_3 = 2^2 x - 2 - 1$ .  
Puis  $r_4 = 2r_3 - 1$  donc  $r_4 = 2^3 x - 2^2 - 2 - 1$ .  
On peut conjecturer que :  $r_n = 2^{n-1} x - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \dots - 2 - 1$ .
2. Je vais démontrer par récurrence la conjecture ci-dessus.  
Pour  $n = 2$  la formule conjecturée donne :  $r_2 = 2x - 1$  donc la propriété est vraie au rang 2.  
Supposons la vraie pour tout entier  $n$  fixé, on a alors  $r_{n+1} = 2r_n - 1$   
donc  $r_{n+1} = 2(2^{n-1} x - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \dots - 2 - 1) - 1$  donc  $r_{n+1} = 2^n x - 2^{n-1} - 2^{n-2} - \dots - 2 - 1$ .  
Donc la propriété est héréditaire.  
Le principe de récurrence permet alors de dire que la propriété est vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

**Le travail à exposer devant le jury**

- 1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez les aides que vous pourriez leur apporter.
- 2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.
- 3 – Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration* (un au niveau du collège et un au niveau du lycée) permettant notamment de développer la compétence « communiquer ».