CAPES 2018

Thème : arithmétique

L'exercice

Soit n un entier naturel, on définit deux entiers a et b par :

$$\begin{cases} a = 4n+1 \\ b = 5n+3 \end{cases}$$

Démontrer que :

$$PGCD(a\,;\,b) = 7 \text{ si et seulement si } n \equiv 5 \pmod 7.$$

Les solutions proposées par trois élèves de terminale scientifique spécialité de mathématiques

Élève 1

Si $n \equiv 5 \pmod 7$ *alors* $n = 7k+5$.
En remplaçant, $\begin{cases} a = 28k+21 \\ b = 35k+28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7(4k+3) \\ b = 7(5k+4) \end{cases}$
Donc 7 divise a et b et puisque $4(5k+4) - 5(4k+3) = 1$, *on en déduit que* $PGCD(a\,;\,b) = 7$.

Élève 2

Si $PGCD(a\,;\,b) = 7$ *alors* $4n+1 \equiv 0 \pmod 7$ *soit* $4n \equiv 6 \pmod 7$.
Comme $2 \times 4 \equiv 1 \pmod 7$, $4n \equiv 6 \pmod 7 \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod 7$.

Élève 3

$4b - 5a = 7$ *donc* $PGCD(a\,;\,b)$ *est soit égal à* 1, *soit égal à* 7.
D'après ce tableau de congruences, j'obtiens l'équivalence.

n	$\equiv$	$\ldots \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$4n+1$	$\equiv$	$\ldots \pmod 7$	1	5	2	5	3	0	4
$5n+3$	$\equiv$	$\ldots \pmod 7$	3	1	6	4	2	0	5

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous proposerez des aides adaptées à chacun des élèves.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique spécialité de mathématiques.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *arithmétique*, un au niveau du collège et un au niveau du lycée. L'un des exercices sera choisi pour modéliser une situation extérieure aux mathématiques.