Thème : suites

L'exercice

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}, \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

Les réponses de trois élèves de terminale S

Élève 1

Je considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Je calcule la dérivée de la fonction f *et j'obtiens* $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

La fonction f' *est clairement positive pour toutes les valeurs de* x.
J'en déduis que la fonction f *est croissante et, par conséquent, que la suite* (u_n) *est croissante.*

Élève 2

À l'aide de ma calculatrice, j'ai calculé les premiers termes de la suite.
J'ai obtenu $u_2 = 0{,}71$, $u_3 = 0{,}58$ *et* $u_4 = 0{,}5$.
Je pense donc que la suite (u_n) *est décroissante.*

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} - u_n = \dfrac{u_n - u_n \times \sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n^2+1}}$*, je n'arrive pas à conclure.*

Élève 3

J'ai calculé les premiers termes : $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *et* $u_4 = \dfrac{1}{\sqrt{4}}$.

On voit que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Pour tout entier n *non nul,* $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}$ *par conséquent* $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

J'en déduis que la suite (u_n) *est décroissante.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – À partir d'une analyse des trois productions d'élèves, précisez une aide à apporter à chacun d'eux pour faire aboutir leur démarche.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *suites*, dont l'un fait intervenir un algorithme. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.