

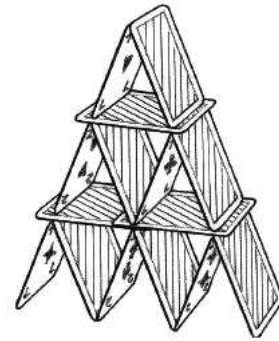
CAPES 2017

Thème : problème à prise d'initiative

L'exercice

On se propose de construire un château de cartes selon le modèle ci-contre.

- 1 – Combien de cartes sont utilisées si on construit ainsi dix étages ?
- 2 – Combien d'étages peut-on construire avec 10 000 cartes, et combien restera-t-il de cartes ?



Château de cartes à trois étages.

Les réponses de deux élèves

Élève 1 (collège)

1 - À chaque étage de cartes, il y a trois cartes de plus qu'à l'étage du dessus. J'ai utilisé le programme ci-contre et j'ai trouvé qu'il y avait 155 cartes pour dix étages.

2 - En utilisant un programme ressemblant, pour 10 000 cartes, j'ai montré que l'on peut faire 81 étages et qu'il restera 118 cartes.

```

quand est cliqué
mettre étage à 1
mettre cartes à 2
mettre total cartes à 2
répéter 9 fois
    ajouter à étage 1
    ajouter à cartes 3
    ajouter à total cartes cartes
    
```

Élève 2 (lycée)

1 - Je note pour n entier naturel, u_n le nombre de cartes utilisées pour construire le $n^{\text{ième}}$ étage. Comme pour chaque nouvel étage, il faut ajouter 3 cartes par rapport à l'étage précédent, j'en déduis que (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 avec $u_0 = 2$.

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = \frac{(2 + 2 + 3 \times 10)}{2} \times 10 = 170, \text{ il faut 170 cartes pour faire dix étages.}$$

2 - Je procède de même en cherchant le plus grand entier n tel que $u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq 10000$.

$$\frac{(2 + 2 + 3 \times n)}{2} \times n \leq 10000$$

$$3n^2 + 4n - 20000 \leq 0.$$

En m'aidant du discriminant, je trouve $n = 80$.

J'ai ainsi utilisé $\frac{(2 + 2 + 3 \times n)}{2} \times n = 9760$ cartes. Il en reste donc $10000 - 9760 = 240$.

Le travail à exposer devant le jury

- 1 – Analysez les démarches de chaque élève en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.
- 2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe.
- 3 – Proposez deux exercices sur le thème *problème à prise d'initiative*. Vous motiverez vos choix en précisant les compétences qu'ils permettent de développer chez les élèves.