

CAPES 2017

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$ avec $u_0 = 0$.

La suite (u_n) est-elle convergente ?

Les démarches de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

	A	B
1	n	u_n
2	0	0,000
3	1	0,500
4	2	0,667
5	3	0,750
6	4	0,800
7	5	0,833
...
102	100	0,990
...
1 002	1 000	0,999

À l'aide d'un tableur, j'ai construit cette feuille de calcul.

Je conjecture que la suite (u_n) est croissante et converge vers 1.

Je montre que la suite est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2 - u_n} - u_n = \frac{1 - 2u_n + u_n^2}{2 - u_n}$$

Je ne sais pas comment conclure.

Élève 2

J'ai calculé les premiers termes de la suite :

$$u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{3}{4}.$$

J'en déduis que $u_n = \frac{n}{n+1}$ et donc que la suite (u_n) converge vers 1 car $u_{10000} = \frac{10000}{10001} \approx 1$.

Le travail à exposer devant le jury

- 1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Précisez l'aide que vous pourriez leur apporter pour mener à bien leur démarche.
- 2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique en ayant recours à l'outil logiciel.
- 3 – Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs visés par chacun d'eux.