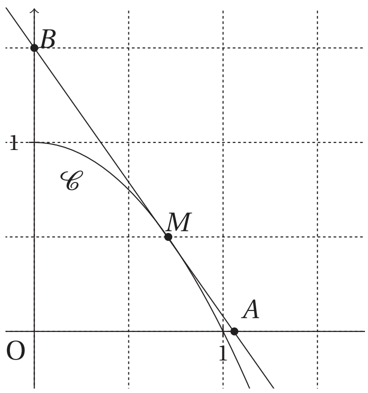
Thème : optimisation

L'exercice

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - x^2.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M de coordonnées $(a\,;f(a))$, avec $0 < a \leq 1$, coupe l'axe (Ox) en A et l'axe (Oy) en B.



Existe-t-il une position du point M sur la courbe $\mathscr{C}$ rendant l'aire du triangle MBO maximale ?

Les démarches de trois élèves de première scientifique

Élève 1

Dans un logiciel de géométrie dynamique, j'ai tracé la courbe représentative de la fonction f.
J'ai créé un curseur de 0 à 1 puis placé le point M de coordonnées $\left(a; f(a)\right)$.
J'ai ensuite tracé la tangente en M puis créé le triangle OBM.
En faisant varier le curseur je constate que l'aire du triangle est maximale lorsque M est en A.

Élève 2

L'aire d'un triangle est égale à la moitié de la base multipliée par la hauteur.
Dans le triangle MBO, la hauteur associée à la base OB est maximale lorsque M a pour abscisse 1.
L'aire du triangle OBM est donc maximale pour $a = 1$ et vaut alors $\frac{1}{2} \times 1 \times 1{,}5 = 0{,}75$.

Élève 3

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
On a $f(a) = 1 - a^2$ et $f'(a) = -2a$ ce qui donne $y = -2ax + 2a^2$.
Pour $a = 1$, on obtient $y = -2x + 2$. Le point B a donc pour ordonnée 2.
Le triangle MBO a pour aire $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$, *ce qui représente son aire maximale.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chacun de ces élèves en précisant les compétences mises en jeu et en indiquant comment vous pourriez les aider à corriger leurs erreurs éventuelles.

2 – Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3 – Présentez deux exercices sur le thème *optimisation*. Vous prendrez soin de motiver vos choix.