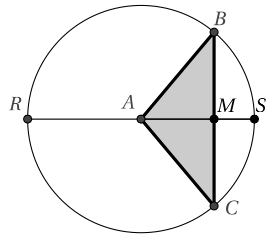
Thème : optimisation

L'exercice

On considère le cercle Γ de diamètre $[RS]$ et de centre A avec $RS = 2$. Pour tout point M de $[AS]$, on trace la perpendiculaire à (RS) passant par M qui coupe le cercle en B et C. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale ?



D'après manuel MATH'x première S, Didier

Les réponses de trois élèves de première S

Élève 1

On note x la longueur AM, on a $BC = 2x$.
J'en déduis l'aire du triangle ABC qui vaut $\dfrac{x \times 2x}{2} = x^2$.
Donc, l'aire du triangle ABC est maximale lorsque x^2 est le plus grand possible, c'est-à-dire lorsque $x = 1$ quand le point M est en S.

Élève 2

Le triangle AMB est rectangle en M donc d'après Pythagore, $AB^2 = AM^2 + MB^2$.
donc $MB^2 = AM^2 - AB^2 = x^2 - 1$. J'en déduis que $MB = \sqrt{x^2 - 1}$.
Je note $f(x)$ l'aire cherchée, on a : $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2}$.
J'ai tracé la courbe de la fonction sur ma calculatrice, mais cela ne m'a rien donné.

Élève 3

Je note $\theta = \widehat{MAB}$ et $f(\theta)$ l'aire du triangle ABC.
On a : $f(\theta) = \dfrac{AM.BC}{2} = \dfrac{\cos(\theta).2\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta)\sin(\theta)$.
Comme $-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1$, on a $f(\theta) \leqslant 2$.
Il existe donc bien une position du point M pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale, cette aire vaut 2.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la démarche de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et ses erreurs éventuelles.

2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3 – Proposez deux exercices sur le thème de l'*optimisation*, dont l'un au moins devra illustrer l'apport d'un logiciel dans sa résolution.