

Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans ce repère, on définit les quatre points $A(1; 2; 3)$, $B(2; -1; 0)$, $C(0; -3; 1)$ et $D(-1; 0; 2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

Les réponses de trois élèves de terminale S

Élève 1

Je détermine les coordonnées du vecteur \vec{AB} , vecteur directeur de la droite (AB) et les coordonnées du vecteur \vec{CD} , vecteur directeur de la droite (CD) .

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de \vec{AB} et \vec{CD} ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. Alors les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Élève 2

J'ai utilisé un logiciel de géométrie dans l'espace.

J'ai entré les coordonnées des points A, B, C et D puis j'ai tracé le plan ABC .

Son équation est $9x - 5y + 8z = 23$.

Donc, je peux dire que D n'appartient pas au plan ABC .

Élève 3

J'écris une équation paramétrique de chacune des deux droites :

$$(AB) \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 3-3t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R} \qquad (CD) \begin{cases} x = -t' \\ y = -3+3t' \\ z = 1+t' \end{cases} \quad t' \in \mathbf{R}$$

$M(x; y; z)$ est un point d'intersection des deux droites si et seulement si ses coordonnées vérifient les deux équations. On obtient un système :

$$\begin{cases} 1+t = -t' \\ 2-3t = -3+3t' \\ 3-3t = 1+t' \end{cases}$$

Dans la première équation on a $t' = -1-t$ et en remplaçant dans la troisième, on obtient $3-3t = 1-1-t$ ce qui donne $t = \frac{3}{2}$ et donc ensuite $t' = -\frac{5}{2}$. On peut maintenant calculer les coordonnées de M par exemple à partir de (AB) et on trouve $M\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Les droites (AB) et (CD) sont donc sécantes en M .

Le travail à exposer devant le jury

- 1 – Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en évidence les compétences mobilisées ainsi que les erreurs éventuelles.
- 2 – En vous appuyant sur les productions des élèves, présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.
- 3 – En motivant vos choix, proposez deux ou trois exercices sur le thème de la géométrie dans l'espace.