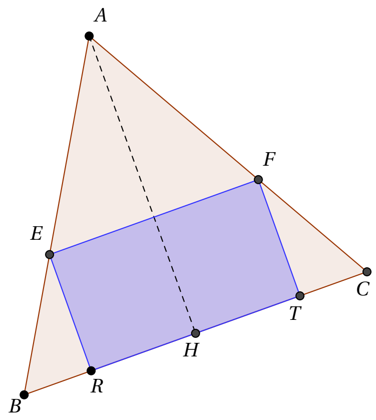
Thème : problèmes d'optimisation

L'exercice

On considère un rectangle inscrit dans un triangle équilatéral de côté 18 cm comme représenté sur la figure ci-contre. On souhaite que ce rectangle ait la plus grande aire possible.
On désigne par H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
Où faut-il placer le point R pour que l'aire du rectangle $REFT$ soit maximale ?



Les réponses de trois élèves de seconde

Élève 1

Je pose $x = RH$.
D'après le théorème de Thalès dans le triangle HBA : $\dfrac{BR}{BH} = \dfrac{ER}{AH}$ *donc* $\dfrac{9-x}{9} = \dfrac{ER}{h}$.
Le calcul de h donne : $h = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$. *On obtient* $ER = 9\sqrt{3} \times \dfrac{9-x}{9} = \sqrt{3}(9-x)$.
L'aire est : $A = \sqrt{3} \times 2x(9-x)$.
En affichant à la calculatrice la fonction $f(x) = x(9-x) \times 2\sqrt{3}$, *j'obtiens en lisant dans la table des valeurs un maximum en* $x = 4$ *et* $x = 5$.

Élève 2

À l'aide d'un logiciel, j'ai construit la figure. Je cherche ensuite la plus grande aire possible.
En déplaçant le point R *sur le côté du triangle, j'obtiens* $BR = 4{,}48$ *environ pou un maximum de l'aire.*
Il nous faut donc placer le point R *à* 4,48 *du point* B.

Élève 3

J'ai calculé l'aire du rectangle pour $BR = 1$ *cm :* $h = 18\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ *et* $BH = 9$ *cm.*
Dans le triangle ABH : $\dfrac{BR}{BH} = \dfrac{ER}{h}$. *Donc* $\dfrac{1}{9} = \dfrac{ER}{9\sqrt{3}}$ *d'où* $ER = \sqrt{3}$ *et* $A = \ell \times L = 2 \times 8 \times \sqrt{3} \approx 27{,}7$ cm^2.
De même, pour $BR = 2$ *cm,* $A = 2 \times 7 \times 2\sqrt{3} \approx 48{,}5$ cm^2 *; pour* $BR = 3$ *cm,* $A \approx 62{,}4$ cm^2.
Pour $BR = 4$ *cm et pour* $BR = 5$ *cm, je trouve* 69,28 cm^2 *puis cela diminue.*
Le maximum est donc obtenu pour une valeur de BR *entre* 4 *cm et* 5 *cm.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la démarche de chaque élève en mettant en évidence leurs compétences en termes de conjecture et de démonstration.

2- Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3- Proposez deux *problèmes d'optimisation*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous souhaitez développer chez les élèves.