

**Thème : conjecture et démonstration**

CAPES 2015

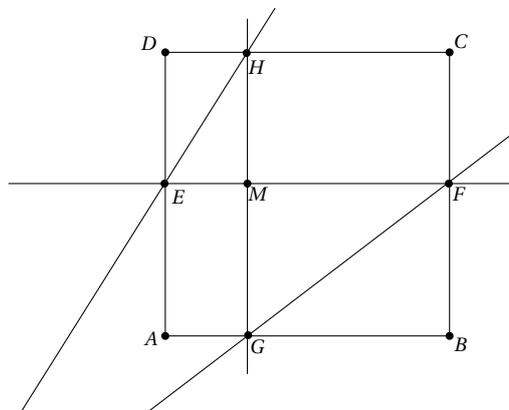
**L'exercice**

$ABCD$  est un carré. On place un point  $M$  à l'intérieur du carré.

La droite parallèle à  $(AB)$  passant par  $M$  coupe  $[AD]$  en  $E$  et  $[BC]$  en  $F$ .

La droite parallèle à  $(AD)$  passant par  $M$  coupe  $[AB]$  en  $G$  et  $[CD]$  en  $H$ .

L'objectif est de déterminer quelles sont les positions du point  $M$  pour lesquelles  $(EH)$  et  $(FG)$  sont parallèles.



**Les productions de deux groupes d'élèves de seconde**

**Production 1**

D'après le théorème de Thalès,  $(EH) \parallel (FG)$  si  $\frac{EM}{MF} = \frac{HM}{MG} = \frac{EH}{GF}$  donc  $EM \times MG = MF \times HM$ .

$EM \times MG$  est l'aire du rectangle  $EMGA$  et  $MF \times HM$  est l'aire du rectangle  $HCFM$ .

Donc,  $(EH) \parallel (FG)$  si l'aire de  $EMGA$  est égale à l'aire de  $HCFM$ .

Si  $M \in (DB)$  alors  $EMGA$  est le symétrique de  $HCFM$  par rapport à  $(DB)$ .

Donc si  $M \in (DB)$  alors  $(EH) \parallel (FG)$ .

**Production 2**

Comme on l'a remarqué avec le logiciel de géométrie, le point  $M$  devra appartenir à la diagonale  $[DB]$  pour que les segments  $[EH]$  et  $[GF]$  soient parallèles.

On veut montrer que les vecteurs  $\vec{EH}$  et  $\vec{GF}$  sont colinéaires.

Pour cela, il faudra mettre en place un repère orthonormé pour déterminer les coordonnées des vecteurs et ensuite il faudra faire les produits en croix.

On suppose que  $E(0; y)$ ,  $G(x; 0)$ ,  $H(x; 1)$  et  $F(1; y)$ .

$$\vec{EH} \begin{pmatrix} x_H - x_E \\ y_H - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 - y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{GF} \begin{pmatrix} x_F - x_G \\ y_F - y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x \\ y \end{pmatrix}$$

$$xy = (1 - y)(1 - x)$$

$$xy = 1 - x - y + xy$$

$$0 = 1 - x - y$$

**Le travail à exposer devant le jury**

- 1 – Analysez les productions des élèves en étudiant notamment la pertinence de la démarche et des outils utilisés ainsi que les compétences construites.
- 2 – Présentez, en vous appuyant sur les productions des élèves, une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
- 3 – Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.