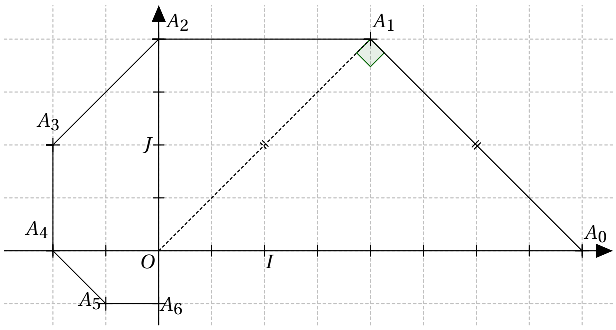
Thème : problèmes conduisant à l'étude de suites

L'exercice

On se place dans un repère orthonormé (O, I, J).
A_0 est le point de coordonnées $(4, 0)$. On construit les points $A_1, A_2, \ldots$ de telle manière que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} soit rectangle isocèle en A_{n+1}.

1. On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $d_n = A_nA_{n+1}$.
   (a) Calculer d_0, d_1, d_2.
   (b) Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
2. Calculer la longueur de la « spirale infinie » $A_0, A_1, A_2\ldots$



Les réponses de deux élèves de Terminale S

Élève 1

1. *On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $d_n = A_nA_{n+1}$.*
   (a) D'après le théorème de Pythagore : $4^2 = OA_1{}^2 + A_1A_0{}^2$, donc $16 = 2A_1A_0{}^2$, d'où $d_0 = 2\sqrt{2}$.
   $(2\sqrt{2})^2 = 2A_1A_2{}^2$, d'où $d_1 = A_1A_2 = 2$; $2^2 = 2A_2A_3{}^2$, d'où $d_3 = A_2A_3 = \sqrt{2}$.
   (b) Je constate que la suite est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $2\sqrt{2}$.
2. *La longueur de la spirale augmente avec les valeurs de n, on peut donc dire que la longueur totale n'existe pas car elle est infinie.*

Élève 2

1. *On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $d_n = A_nA_{n+1}$.*
   (a) J'utilise la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$:
   $d_0 = \sqrt{(2-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$; $d_1 = \sqrt{(0-2)^2 + (2-2)^2} = 2$; $d_2 = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$.
   (b) La suite semble être géométrique de raison $0,7$ et de premier terme $\sqrt{8}$.
2. *J'applique la formule de la somme des termes :*
   $d_0 + \ldots + d_n = d_0 \dfrac{1 - 0,7^n}{1 - 0,7}$. Je trouve que la longueur de la spirale se rapproche de $3,3\,d_0 \approx 9$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions de ces deux élèves en étudiant notamment la pertinence de la démarche et les compétences dans le domaine des suites.

2- Présentez une correction de la question 2 de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *problèmes conduisant à l'étude de suites* à des niveaux de classe différents. Vous prendrez soin de motiver vos choix.