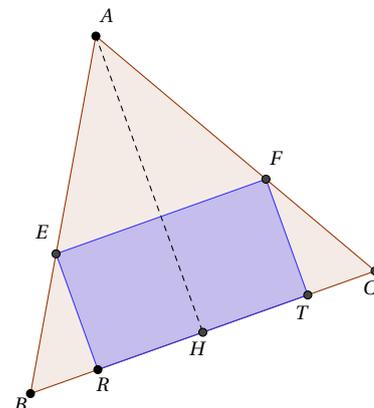


CAPES 2015

Thème : problèmes d'optimisation

L'exercice

On considère un rectangle inscrit dans un triangle équilatéral de côté 18 cm comme représenté sur la figure ci-contre. On souhaite que ce rectangle ait la plus grande aire possible. On désigne par H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC . Où faut-il placer le point R pour que l'aire du rectangle $REFT$ soit maximale ?



Les réponses de trois élèves de seconde

Élève 1

Je pose $x = RH$.

D'après le théorème de Thalès dans le triangle HBA : $\frac{BR}{BH} = \frac{ER}{AH}$ donc $\frac{9-x}{9} = \frac{ER}{h}$.

Le calcul de h donne : $h = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$. On obtient $ER = 9\sqrt{3} \times \frac{9-x}{9} = \sqrt{3}(9-x)$.

L'aire est : $A = \sqrt{3} \times 2x(9-x)$.

En affichant à la calculatrice la fonction $f(x) = x(9-x) \times 2\sqrt{3}$, j'obtiens en lisant dans la table des valeurs un maximum en $x = 4$ et $x = 5$.

Élève 2

À l'aide d'un logiciel, j'ai construit la figure. Je cherche ensuite la plus grande aire possible.

En déplaçant le point R sur le côté du triangle, j'obtiens $BR = 4,48$ environ pour un maximum de l'aire.

Il nous faut donc placer le point R à 4,48 du point B .

Élève 3

J'ai calculé l'aire du rectangle pour $BR = 1$ cm : $h = 18 \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ et $BH = 9$ cm.

Dans le triangle ABH : $\frac{BR}{BH} = \frac{ER}{h}$. Donc $\frac{1}{9} = \frac{ER}{9\sqrt{3}}$ d'où $ER = \sqrt{3}$ et $A = \ell \times L = 2 \times 8 \times \sqrt{3} \approx 27,7$ cm².

De même, pour $BR = 2$ cm, $A = 2 \times 7 \times 2\sqrt{3} \approx 48,5$ cm² ; pour $BR = 3$ cm, $A \approx 62,4$ cm².

Pour $BR = 4$ cm et pour $BR = 5$ cm, je trouve 69,28 cm² puis cela diminue.

Le maximum est donc obtenu pour une valeur de BR entre 4 cm et 5 cm.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Analysez la démarche de chaque élève en mettant en évidence leurs compétences en termes de conjecture et de démonstration.
- 2- Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
- 3- Proposez deux *problèmes d'optimisation*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous souhaitez développer chez les élèves.