

Thème : équations différentielles

L'exercice

Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on propose plusieurs modèles. On appelle N la fonction représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé en année). On sait que $N(0) = 2000$.

1. On suppose dans cette question que la fonction N est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y' = r y$$

où r est une constante strictement positive.

- Résoudre l'équation différentielle (E_1) .
- Donner l'expression de la fonction N .
- Représenter à l'aide d'un logiciel de géométrie les fonctions N lorsque r varie dans l'intervalle $[0, 4]$.

2. On suppose dans cette question que la fonction N est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = 2y \left(1 - \frac{y}{4000} \right).$$

On admet que N est définie et strictement positive sur $]0; +\infty[$.

On pose, pour $t \in]0; +\infty[$, $g(t) = \frac{1}{N(t)}$.

- Démontrer que g est solution sur I de l'équation différentielle $(E') : y' = -2y + \frac{1}{2000}$.
- Résoudre, en utilisant éventuellement un logiciel de calcul formel, l'équation différentielle (E') .
- En déduire que sur $]0; +\infty[$:

$$N(t) = \frac{4000}{e^{-2t} + 1}.$$

Un extrait des programmes de STS sur les équations différentielles (BO du 4 juillet 2013)

On s'attache à relier les exemples étudiés avec les enseignements scientifiques et technologiques, en montrant l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale. L'utilisation des outils logiciels est sollicitée ; elle a pour finalités :

- de mettre en évidence, expérimentalement, la signification ou l'importance de certains paramètres ou phénomènes ;*
- de dépasser la seule détermination des solutions d'une équation différentielle en donnant la possibilité de visualiser des familles de courbes représentatives de ces solutions ;*
- de permettre, avec l'aide du calcul formel, de donner une expression des solutions dans certains cas complexes. Si, dans ce module, on développe plus particulièrement deux types d'équations différentielles, on est également attentif à donner une vision plus large de ces notions en présentant des équations différentielles dont on ne peut donner qu'une solution approchée tout en faisant saisir des principes généraux comme la notion de famille de solutions.*

Le travail à exposer devant le jury

- Analysez dans quelle mesure cet exercice correspond aux attentes du programme de STS.
- Proposez une correction de la question 2 telle que vous la présenteriez devant une classe de STS.
- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *équations différentielles*.